RIESGO Y VOLATILIDAD: MODELOS ECONOMÉTRICOS Y PRÁCTICA FINANCIERA*

Robert Engle**
New York University

El comportarse de manera óptima implica tomar riesgos que merecen la pena. En ello consiste el paradigma central de las finanzas: debemos asumir ciertos riesgos para obtener beneficios, pero no todos los riesgos aportan las mismas compensaciones. Tanto los riesgos como los beneficios pertenecen al futuro, así que se ponen en una balanza las pérdidas previstas frente a las recompensas esperadas. Por lo tanto, optimizamos nuestro comportamiento y, en particular, nuestra cartera financiera, para maximizar los rendimientos y minimizar los riesgos. Cuando los profesionales ponían en práctica sus estrategias financieras, necesitaban estimaciones de las varianzas. Un método simple, a veces conocido con el nombre de *volatilidad histórica*, se solía usar y sigue usándose ampliamente. En este método, se estima la volatilidad mediante la desviación típica muestral de los rendimientos a lo largo de un corto periodo de tiempo. Pero, ¿cuál es el periodo que se debe emplear? Si éste es demasiado largo, no tendrá mucha relevancia para medir el riesgo del momento presente, y si es demasiado corto, tendrá mucho ruido. Por otra parte, en realidad es la volatilidad de un periodo futuro la que debería considerarse como medida del riesgo, por lo que son necesarias no sólo una medida de la volatilidad actual, sino también una predicción de la volatilidad futura. El método de la volatilidad histórica no ofrecía ninguna solución para estos problemas. A un nivel algo más profundo, hay una inconsistencia lógica en suponer, por ejemplo, que la varianza es constante para un periodo de un año que se acabe hoy y que es constante también para el año que finalizó ayer, pero con un valor diferente. Se necesita una teoría de volatilidades dinámicas, y ése es el papel que cumplen los modelos ARCH y sus múltiples extensiones y éste es el tema que abordamos hoy. Describiré la génesis del modelo ARCH y abordaré algunas de sus múltiples generalizaciones, así como su amplio respaldo empírico. En secciones posteriores, aportaré una demostración de cómo puede emplearse este modelo dinámico para predecir la volatilidad y el riesgo a largo plazo, y cómo se puede emplear para valorar opciones.

Palabras clave: Conferencia Nobel, riesgo, volatilidad, modelo ARCH, modelo GARCH, volatilidad financiera, prácticas financieras, *Value at Risk*, valoración de opciones.

 Este artículo es una versión revisada del discurso pronunciado por el profesor Robert Engle en Estocolmo, el 8 de diciembre de 2003, cuando recibió, junto con el profesor Clive W. J. Granger, el Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas instituido en memoria de Alfred Nobel (Premio Nobel de Economía). El artículo se publica en *RAE Revista Asturiana de Economía* con el consentimiento del autor y la autorización de la Fundación Nobel. La traducción ha sido realizada por Sofía García y ha sido revisada por Arielle Beyaert, Carlos Capistrán y J. Gonzalo Rangel.

(**) Stern School of Business, New York University. Este artículo es el resultado de más de dos décadas de investigación y de colaboración con numerosísimas personas. En particular, deseo expresarle mi agradecimiento a las audiencias del B.I.S, de Estocolmo, de Uppsala, de la Universidad de Cornell y de la Universidad de Savoya por haberme escuchado durante la preparación de esta charla. David Hendry, Tim Bollerslev, Andrew Patton, y Robert Ferstenberg me hicieron sugerencias detalladas. No obstante, soy el responsable de cualquier laguna posible.

La ventaja que presenta saber de riesgos es que nos permite cambiar nuestro comportamiento para evitarlos. Por supuesto, es fácil darse cuenta de que es imposible evitar todos los riesgos; para ello, tendríamos que dejar de viajar en avión, en coche e incluso dejar de caminar, tendríamos que comer y beber únicamente alimentos sanos, y no podríamos dejar que nos diese nunca el sol. Incluso el darse un baño podría resultar peligroso. No recibiría este premio hoy si tratase siempre de evitar todo riesgo. Hay ciertos riesgos que decidimos asumir porque los beneficios que podemos obtener tomándolos son superiores a los posibles costes. El comportarse de manera óptima implica tomar riesgos que merecen la pena. En ello consiste el paradigma central de las finanzas: debemos asumir ciertos riesgos para obtener beneficios, pero no todos los riesgos aportan las mismas compensaciones. Tanto los riesgos como los beneficios pertenecen al futuro, así que se ponen en una balanza las pérdidas previstas frente a las recompensas esperadas. Por lo tanto, optimizamos nuestro comportamiento y, en particular, nuestra cartera financiera, para maximizar los rendimientos y minimizar los riesgos.

Este simple concepto tiene una larga historia en economía y una larga tradición en la concesión de los Premios Nobel. Harry M. Markowitz (1952) y James Tobin (1958) asociaron el riesgo a la varianza del valor de una cartera. Basándose en la búsqueda de la evasión del riesgo, derivaron la teoría de la cartera óptima y el comportamiento de los bancos. William Sharpe (1964) desarrolló las implicaciones de que todos los inversores busquen los mismos objetivos con la misma información. Esta teoría se llama Modelo de Valoración de los Precios de los Activos de Capital, o CAPM (del inglés, *Capital Asset Pricing Model*), y demuestra que existe una relación natural entre los rendimientos esperados y la varianza. Estas contribuciones recibieron los premios Nobel de 1981 y 1990.

Fisher Black y Myron Scholes (1972) y Robert C. Merton (1973) desarrollaron un modelo para evaluar el precio de las opciones. Si bien la teoría se basa en argumentos de réplica de la opción mediante estrategias de negociación dinámicas, ésta también es consistente con el CAPM. Las opciones *put* proporcionan al propietario el derecho de vender un activo a un precio determinado en un momento del futuro. En este sentido, estas opciones pueden ser consideradas como un seguro. Al comprar estas opciones *put*, se puede eliminar por completo el riesgo de la cartera. Pero, ¿cuánto cuesta este seguro? El precio de esta protección depende de los riesgos y estos riesgos se miden por la varianza de los rendimientos del activo. Esta contribución obtuvo el reconocimiento de un premio Nobel en 1997.

Cuando los profesionales ponían en práctica estas estrategias financieras, necesitaban estimaciones de las varianzas. Normalmente se empleaba la raíz cuadrada de la varianza, llamada volatilidad. Estos profesionales se dieron cuenta rápidamente de que las volatilidades cambiaban con el tiempo. Asimismo, encontraban respuestas distintas para diferentes periodos de tiempo. Un método simple, a veces conocido con el nombre de *volatilidad histórica*, se solía usar y sigue usándose ampliamente. En este método, se estima la volatilidad mediante la desviación típica muestral de los rendimientos a lo largo de un corto periodo de tiempo. Pero, ¿cuál es el periodo que se debe emplear? Si éste es demasiado largo, no tendrá mucha relevancia para medir el riesgo del momento presente; si es demasiado corto, tendrá mucho ruido. Por otra parte, en realidad es la volatilidad de un periodo futuro la que debería considerarse como medida del riesgo, por lo que son necesarias no sólo una medida de la volatilidad actual, sino también una predicción de la volatilidad futura. Esto conlleva la posibilidad de que la predicción de la volatilidad media para la semana siguiente sea diferente de la predicción a un año o a una década. El método de la volatilidad histórica no ofrecía ninguna solución para estos problemas.

A un nivel algo más profundo, hay una inconsistencia lógica en suponer, por ejemplo, que la varianza es constante para un periodo de un año que se acabe hoy y que es constante también para el año que finalizó ayer, pero con un valor diferente. Se necesita una teoría de volatilidades dinámicas, y ése es el papel que cumplen los modelos ARCH y sus múltiples extensiones y éste es el tema que abordamos hoy.

En la siguiente sección, describiré la génesis del modelo ARCH, y abordaré algunas de sus múltiples generalizaciones, así como su amplio respaldo empírico. En secciones posteriores, aportaré una demostración de cómo puede emplearse este modelo dinámico para predecir la volatilidad y el riesgo a largo plazo, y cómo se puede emplear para valorar opciones.

1. Nacimiento del modelo ARCH

El modelo ARCH fue inventado durante mi estancia sabática en la *London School of Economics*, en 1979. El ambiente que proporcionaba el almuerzo en su sala de profesores, con David Hendry, Dennis Sargan, Jim Durbin y muchos otros económetras de primera fila, resultaba muy estimulante. Mi objetivo era encontrar un modelo que pudiese evaluar la validez de una conjetura de Milton Friedman (1977), según la cual el carácter impredecible de la inflación era una de las principales causas de los ciclos económicos. Friedman había adelantado la hipótesis de que el problema no era el nivel de inflación por sí mismo, sino que la incertidumbre sobre los costes y los precios futuros era lo que desanimaba a los inversores y llevaba a una recesión. Ésta sólo era posible si la incertidumbre cambiaba con el tiempo; y mi objetivo consistía en comprobarlo. Los econometras llaman a esto "heteroscedasticidad". Poco antes, había trabajado mucho con el filtro de Kalman y sabía que una función de verosimilitud podía descomponerse en la suma de sus densidades predictivas o condicionadas. Por otra parte, mi colega Clive Granger, con el que comparto este premio, había desarrollado, no hacía mucho, un contraste para modelos de series temporales bilineales basado en la dependencia en el tiempo de los residuos al cuadrado. En concreto, los residuos al cuadrado estaban frecuentemente autocorrelacionados a pesar de que los residuos en sí no lo estuviesen. Este contraste a menudo resultaba muy significativo para datos económicos; sospeché que estaba detectando algo más que bilinealidad, pero no sabía de qué se trataba.

La respuesta era la *heteroscedasticidad condicionada autorregresiva* o ARCH (*autoregressive conditional heteroskedasticity*); fue David Hendry quien inventó el nombre. El modelo ARCH describe la predicción de la varianza en función de variables observables actuales. En vez de usar desviaciones típicas sobre muestras largas o cortas, el modelo ARCH proponía usar medias ponderadas de los cuadrados de los errores de predicción del pasado, es decir, una especie de varianza ponderada. Estas ponderaciones podían conceder mayor influencia a la información reciente y restarle peso al pasado lejano. Claramente, el modelo ARCH era una simple generalización de la varianza muestral.

El gran avance de este modelo residía en la posibilidad de estimar las ponderaciones mediante datos históricos a pesar de que la volatilidad verdadera no se hubiese observado nunca. Funciona de la siguiente manera: se pueden calcular predicciones cada día o en cada periodo. Examinando estas predicciones para diferentes ponderaciones, podemos encontrar el conjunto de ponderaciones que hacen que las predicciones sean tan cercanas a la varianza del siguiente rendimiento como sea posible. Este procedimiento, basado en la máxima verosimilitud, ofrece una solución sistemática al problema de estimar las ponderaciones óptimas. Una vez determinadas las ponderaciones, este modelo dinámico de volatilidad variable en el tiempo puede utilizarse para medir la volatilidad en cualquier periodo, así como para predecirla en el futuro tanto cercano como lejano. El contraste de Granger para la bilinealidad resultó ser el contraste óptimo o el contraste del multiplicador de Lagrange para el efecto ARCH, y hoy en día se utiliza ampliamente.

La formulación de un modelo dinámico explícito para la volatilidad presenta muchas ventajas. Como ya se ha mencionado anteriormente, los parámetros óptimos se pueden estimar por máxima verosimilitud. Se pueden aplicar contrastes de adecuación y precisión del modelo de volatilidad para comprobar la validez del procedimiento. Sobre la base de estos parámetros estimados, pueden construirse predicciones para dentro de un periodo o para varios periodos hacia adelante. Las distribuciones no condicionadas pueden expresarse matemáticamente y, por lo general, son realistas. Si insertamos las variables pertinentes en el modelo, podemos contrastar modelos económicos que tratan de determinar las causas de la volatilidad. De forma similar, la incorporación de variables endógenas y de ecuaciones adicionales permite contrastar modelos sobre las consecuencias de la volatilidad. Más adelante veremos distintas aplicaciones.

El colaborador de David Hendry, Frank Srba, fue quien escribió el primer programa ARCH. La aplicación que se publicó en Engle (1982) se refería a la inflación en el Reino Unido, ya que en ello consistía la conjetura de Friedman. Si bien los datos indicaban con claridad que la incertidumbre en las predicciones de inflación variaba con el tiempo, no estaba relacionada con los ciclos económicos del Reino Unido. Unos contrastes similares sobre los datos de inflación estadounidenses, recogidos en Engle (1983), confirmaron el descubrimiento del efecto ARCH, pero no evidenciaron ningún efecto relacionado con los ciclos económicos. Si bien el dilema entre el riesgo y el rendimiento constituye una parte importante de la teoría macroeconómica, las implicaciones empíricas son, a menudo, difíciles de detectar porque están camufladas por otros efectos dominantes y se ven oscurecidas por el uso de datos de frecuencia relativamente baja. En finanzas, los efectos riesgo/rendimiento tienen una importancia primordial y se dispone de datos de frecuencia diaria, o incluso intra-diaria, que permiten hacer predicciones de volatilidad con precisión. Por ello, fue en el campo de las finanzas en el que se desarrolló la gran riqueza y variedad de modelos ARCH.

2. Generalización del modelo ARCH

Se pueden estimar y contrastar generalizaciones de distintos esquemas de ponderación. El modelo que se emplea de forma más generalizada hoy en día es el que desarrolló mi brillante estudiante Tim Bollerslev (1986), que recibió el nombre de Heteroscedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada o GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Este modelo, básicamente, generaliza el modelo ARCH, que es puramente autorregresivo, para lograr un modelo autorregresivo de medias móviles. Se establece el supuesto de que las ponderaciones de los cuadrados de los residuos pasados disminuyen geométricamente a una tasa que debe estimarse a partir de los datos. El modelo GARCH (1,1) se presta a una interpretación fácil de entender e intuitivamente atractiva. La predicción GARCH de la varianza es una media ponderada de tres predicciones diferentes de la varianza. Una de ellas es una varianza constante que corresponde a la media de largo plazo. La segunda es la predicción que se hizo en el periodo anterior. La tercera corresponde a la nueva información que no estaba disponible cuando se hizo la predicción anterior. Ésta podría considerarse como una predicción de la varianza basada en un único periodo de información. Las ponderaciones de estas tres predicciones determinan la rapidez con la que cambia la varianza al incluir información nueva y la rapidez con la que vuelve a su media de largo plazo.

La segunda generalización de enorme importancia es la del GARCH Exponencial o EGARCH (*Exponential GARCH*); se la debemos a Daniel B. Nelson (1991), que falleció de forma prematura en 1995 dejando un vacío irremplazable en nuestra profesión, como muy bien lo expresan Bollerslev y Peter E. Rossi (1995) en su panegírico. En su corta carrera académica, sus contribuciones tuvieron una influencia extraordinaria. Descubrió que la volatilidad podía responder de forma asimétrica a errores de predicción pasados. En un contexto financiero, los rendimientos negativos parecían ser predictores de la volatilidad más importantes que los positivos. Las caídas fuertes de los precios producen predicciones de mayor volatilidad que las que produciría un aumento de los precios en la misma proporción. Éste es un efecto interesante desde el punto de vista económico, que tiene implicaciones de muy diversa índole que trataremos más adelante.

Muchos otros investigadores han propuesto generalizaciones adicionales. Nos encontramos hoy en día frente a una sopa de letras de modelos ARCH, entre los cuales hay que mencionar: AARCH, APARCH, FIGARCH, FIEGARCH, STARCH, SWARCH, GJR-GARCH, TARCH, MARCH,

NARCH, SNPARCH, SPARCH, SQGARCH, CESGARCH, ARCH con componentes, ARCH con componentes asimétricos, Taylor-Schwert, ARCH con distribución t de Student, GED-ARCH, y muchos otros que, desgraciadamente, he tenido que pasar por alto. Bollerslev *et al*. (1992), Bollerslev *et al*. (1994), Engle (2002b), y Engle e Isao Ishida (2002) ofrecieron revisiones panorámicas de muchos de estos modelos. Estos modelos reconocen que en la volatilidad podría haber importantes características de asimetría, no linealidad y memoria larga, y que los rendimientos pueden ser no normales y presentar toda una variedad de distribuciones paramétricas y no paramétricas.

También ha tenido lugar otro enorme desarrollo de unos modelos de volatilidad muy relacionados con los anteriores, pero con características distintas desde el punto de vista econométrico: los llamados modelos de Volatilidad Estocástica o modelos SV (*Stochastic Volatility*). Véase, por ejemplo, Peter K. Clark (1973), Stephen Taylor (1986), Andrew C. Harvey *et al*. (1994), y Taylor (1994). Estos modelos tienen un proceso generador de los datos diferente, que los hacen más adecuados para ciertos objetivos pero más difíciles de estimar. En un marco lineal, estos modelos serían simplemente representaciones diferentes del mismo proceso; pero en el contexto no lineal estas especificaciones alternativas no son equivalentes, a pesar de ser muy cercanas la una de la otra.

3. Modelado de los rendimientos financieros

El éxito de la familia de modelos ARCH se puede atribuir en gran medida a las aplicaciones que éstos tienen en finanzas. Si bien los modelos pueden aplicarse a numerosos problemas estadísticos con series temporales, adquieren un valor especial cuando se aplican a series temporales financieras. Esto se debe en parte a la importancia del dilema del que hemos hablado antes entre riesgo y rendimiento en los mercados financieros, y en parte a tres características omnipresentes de los rendimientos financieros de los activos con riesgo. Los rendimientos son prácticamente impredecibles, tienen, sorprendentemente, una gran cantidad de valores extremos, y tanto los periodos de más agitación como los más tranquilos están agrupados en el tiempo. Estas características a menudo se describen como *impredecibilidad, colas gordas* (exceso de curtosis) y *agrupamiento de la volatilidad.* Éstas son precisamente las características para las cuales se diseña el modelo ARCH. Cuando la volatilidad es elevada, es probable que permanezca elevada, y cuando ésta es baja es probable que permanezca baja. Sin embargo, estos periodos están limitados en el tiempo, así que es seguro que la predicción acabará volviendo hacia volatilidades menos extremas. Un proceso ARCH produce patrones dinámicos de vuelta a la media que se pueden predecir. También produce un mayor número de valores extremos de lo que se esperaría de una distribución normal estándar, ya que los valores extremos durante el periodo de alta volatilidad son mayores de los que se hubiesen podido anticipar con un proceso de volatilidad constante.

La especificación GARCH (1,1) es el caballo de batalla de las aplicaciones financieras. Resulta llamativo el que se pueda emplear un único modelo para describir la dinámica de volatilidad de casi todas las series de rendimientos financieros. Esto es cierto no sólo para las acciones de Estados Unidos, sino también para las acciones negociadas en la mayoría de los mercados desarrollados, para la mayoría de las acciones que se negocian en mercados emergentes y para la mayoría de los índices de los mercados de valores. También es aplicable a tipos de cambio, rendimientos de obligaciones y rendimientos en los mercados de bienes primarios. En muchos casos se podría encontrar un modelo un poco mejor entre la lista de modelos nombrados anteriormente, pero el modelo GARCH es, por lo general, un excelente punto de partida.

El amplio éxito del modelo GARCH (1,1) exige una explicación. ¿Cuál es la teoría que puede explicar el hecho de que la dinámica de la volatilidad sea similar en tantos mercados financieros diferentes? Al desarrollar tal teoría debemos entender en primer lugar por qué cambian los precios de los activos. Se compran y poseen activos financieros por las retribuciones futuras que se esperan de los mismos. Dado que estas retribuciones presentan incertidumbre y dependen de desarrollos futuros desconocidos, el fijar el precio justo del activo requerirá predicciones de la distribución de estas retribuciones basadas en la mejor información de la que disponemos en el presente. A medida que pasa el tiempo, vamos obteniendo mayor información sobre estos eventos futuros y volvemos a valorar los activos. Por lo tanto, a un nivel muy básico, podemos afirmar que la volatilidad de los precios financieros se debe a la llegada de nueva información. El agrupamiento de la volatilidad corresponde simplemente al agrupamiento de la llegada de información. El hecho de que ésta sea común para tantos activos simplemente refleja el hecho de que la llegada de información nueva está generalmente agrupada en el tiempo.

Para saber por qué es normal que las informaciones nuevas lleguen de manera agrupada, debemos ser más específicos en lo que respecta al flujo de informaciones. Consideremos un acontecimiento como, por ejemplo, un invento que haga que aumente el valor de una empresa porque hace que mejoren los beneficios futuros y los dividendos. El efecto de dicho acontecimiento sobre los precios de las acciones dependerá de las condiciones económicas de la economía y de la empresa. Si la empresa está cerca de la bancarrota, el efecto puede ser muy grande, mientras que si ya opera a pleno rendimiento, éste podría ser reducido. Si la economía tiene tipos de interés bajos y un excedente de mano de obra, podría ser fácil desarrollar este nuevo producto. Manteniendo los demás factores iguales, la respuesta será mayor en un periodo de recesión que en momento de auge. Por ello, no es sorprendente encontrarse frente a mayores niveles de volatilidad en los momentos de recesión económica a pesar de que la tasa de llegada de nuevos inventos sea constante. Se trata de un tipo de agrupamiento de la volatilidad que evoluciona lentamente y que puede dar lugar a ciclos de varios años.

El mismo invento también acarreará un agrupamiento de la volatilidad de alta frecuencia. Cuando se dé a conocer el invento, el mercado no será capaz de estimar su valor de forma inmediata para que se refleje en el precio de las acciones. Puede que los agentes no estén de acuerdo pero que estén lo suficientemente inseguros de sus evaluaciones como para prestar atención a la valoración que los otros hacen de la empresa. Si un inversor compra hasta que el precio alcance el nivel que él estima como nuevo precio adecuado, podría cambiar de estimación al observar que los demás siguen comprando por precios cada vez más elevados. Podría sospechar que los demás tienen mejor información o mejores modelos y, por lo tanto, aumentaría su valoración. Por supuesto, si constata que los demás venden sus acciones, podría entonces revisar su precio a la baja. Este proceso suele llamarse el *descubrimiento del precio (price discovery)* y se ha modelado de forma teórica y empírica en los estudios de microestructura del mercado. Conduce a un agrupamiento de la volatilidad con una frecuencia mucho más elevada que la que habíamos visto antes. Este proceso podría durar unos pocos días o unos pocos minutos.

No obstante, para entender la volatilidad, tenemos que tener en cuenta algo más que un invento. Mientras que la tasa de llegada de inventos puede no seguir patrones claros, habrá otro tipo de noticias que seguramente sí los sigan. La intensidad de información nueva suele ser alta durante las guerras o las épocas de peligro económico. Es también muy probable que durante las cumbres mundiales, las audiencias del congreso o del parlamento, las elecciones o las reuniones del consejo de gobierno del banco central haya muchos acontecimientos que constituyan noticias para el mercado. Este tipo de episodios suelen ser de duración media: no suelen durar más que unas semanas o unos meses.

Los patrones de volatilidad empírica que observamos están compuestos por estos tres tipos de acontecimientos. Por lo tanto, esperamos encontrarnos con dinámicas de volatilidad más bien elaboradas y a menudo nos basamos en series temporales largas para producir modelos precisos de las diferentes constantes en el tiempo.

4. Modelado de las causas y las consecuencias de la volatilidad financiera

Una vez desarrollado un modelo para medir la volatilidad, lo normal es intentar explicar las causas de la volatilidad y los efectos de la volatilidad sobre la economía. Contamos hoy en día con una amplia literatura que examina estas cuestiones. Trataré únicamente algunos de los descubrimientos correspondientes a los mercados financieros.

En los mercados financieros, las consecuencias de la volatilidad son fáciles de describir a pesar de ser quizás difíciles de medir. En una economía con un único activo de riesgo, un aumento de la volatilidad debería llevar a los inversores a vender una parte de ese activo. Si hay una oferta fija, el precio puede bajar lo suficiente como para que los compradores adopten la postura contraria. Con este nuevo precio más reducido, los rendimientos esperados son más elevados, justo en la medida suficiente como para compensar a los inversores por el aumento del riesgo. En el equilibrio, una volatilidad alta debería corresponder a altos rendimientos esperados. Merton (1980) formuló este modelo teórico en tiempo continuo y Engle *et al*. (1987) propusieron un modelo en tiempo discreto. Si el precio del riesgo fuese constante en el tiempo, un aumento de las varianzas condicionadas se traduciría linealmente en un aumento de los rendimientos esperados. Así, la media de la ecuación de rendimiento ya no se consideraría igual a cero, sino que dependería de los rendimientos pasados al cuadrado, exactamente del mismo modo que lo hace la varianza condicionada. Esta restricción muy fuerte sobre los coeficientes puede contrastarse y usarse para estimar el precio del riesgo. También se puede usar para medir el coeficiente de la aversión al riesgo relativa del agente representativo bajo los mismos supuestos.

La evidencia empírica de esta medición no ha aportado resultados unánimes. Mientras que Engle *et al*. (1987) encontraron un efecto positivo y significativo, Ray-Yeutien Chou *et al*. (1992) y Lawrence R. Glosten *et al*. (1993) encontraron una relación que varía a lo largo del tiempo y podría ser negativa debido a la omisión de variables. Kenneth R. French *et al*. (1987) demostraron que una sorpresa positiva en la volatilidad debería tener, y de hecho tiene, un efecto negativo sobre los precios de los activos. No hay un único activo con riesgo en la economía y no es muy probable que el precio del riesgo permanezca constante; por lo tanto, la inestabilidad no debe sorprender y no descarta la existencia de un dilema riesgo/rendimiento, pero el modelar mejor este dilema constituye todo un reto.

Las causas de la volatilidad se modelan de forma más directa. Dado que el modelo ARCH básico y sus numerosas variantes describen la varianza condicionada como una función de los retardos del cuadrado de los rendimientos, éstas son probablemente las causas más cercanas de la volatilidad. Pero es mejor interpretarlos como observables que ayudan a predecir la volatilidad y no como causas. Si las verdaderas causas se incluyesen en la especificación, entonces no se necesitarían los retardos.

Ciertos artículos han seguido esta vía. Torben G. Andersen y Bollerslev (1998b) examinaron los efectos de los comunicados en prensa sobre la volatilidad de los tipos de cambio. La dificultad de encontrar un fuerte poder explicativo queda patente incluso si dichos comunicados tienen efectos importantes. Otro enfoque consiste en usar la volatilidad medida en otros mercados. Engle *et al*. (1990b) demuestran que la volatilidad en las acciones causa volatilidad en las obligaciones en el futuro. Engle *et al*. (1990a) modelan la influencia de la volatilidad en los mercados que cierran antes sobre los mercados que cierran más tarde. Examinan, por ejemplo, la influencia de la volatilidad actual en los mercados europeos y asiáticos de divisas y del día anterior en el mercado estadounidense sobre la volatilidad actual del mercado americano. Yasushi Hamao *et al*. (1990), Pat Burns *et al*. (1998) y otros han aplicado técnicas similares para el mercado global de acciones.

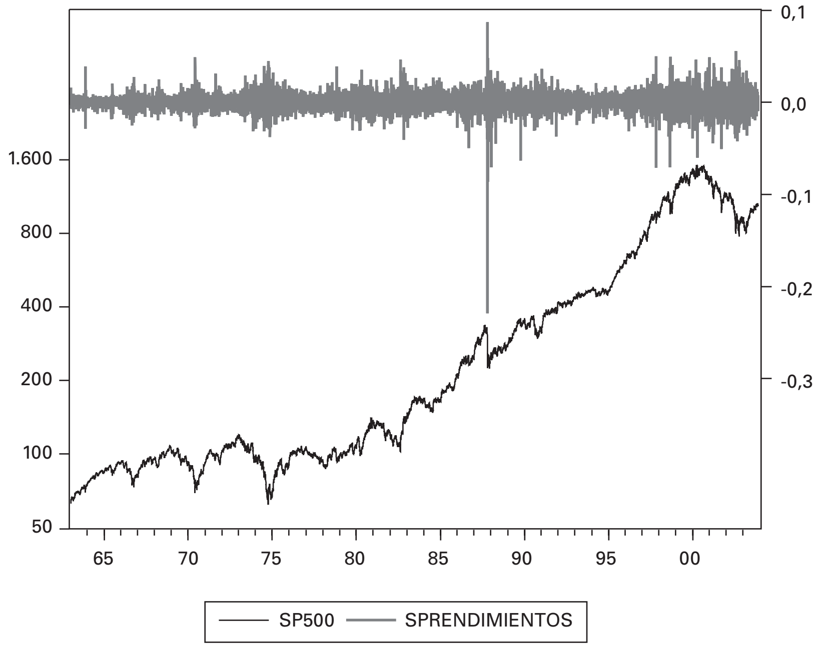
5. Un ejemplo

Para ilustrar el uso de los modelos ARCH en las aplicaciones financieras, haré un análisis más bien extenso del índice compuesto Standard &

Poors 500. Este índice representa el grueso de las valoraciones en el mercado de valores americano. Examinaré los niveles diarios de este índice desde 1963 hasta finales de noviembre de 2003. De esta manera, tendremos una visión global de la historia financiera de Estados Unidos, lo cual ofrece un marco ideal para discutir cómo se usan los modelos ARCH para el tratamiento del riesgo y la valoración de opciones. Todos los estadísticos y los gráficos se han obtenido con EViews™ 4.1.

Los datos iniciales se muestran en el gráfico 1, en el que los precios se representan en el eje de la izquierda. La curva inferior, que es más bien suave, muestra la evolución de este índice a lo largo de los últimos 40 años. Es fácil detectar el importante crecimiento de los precios de las acciones en ese periodo y la disminución subsiguiente tras la llegada del nuevo milenio. A principios de 1963, el índice tenía un valor de 63 dólares y al final del periodo era de 1.035 dólares. Eso significa que un dólar invertido en 1963 tendría un valor de 16 dólares en noviembre de 2003 (más el flujo de dividendos que se habrían recibido, puesto que este índice no toma en cuenta los dividendos en datos diarios). Si el inversor hubiese sido lo suficientemente inteligente como para vender su posición el 24 de marzo de 2000, ésta hubiese tenido un valor de 24 dólares. Con un poco de suerte, no habría comprado ese día. Aunque a menudo vemos imágenes del nivel de estos índices, es obviamente el precio relativo entre el momento de compra y el momento de venta lo que importa. Así, los

Gráfico 1
PRECIOS DIARIOS Y RENDIMIENTOS DEL ÍNDICE S&P 500 ENTRE ENERO DE 1963 Y NOVIEMBRE DE 2003

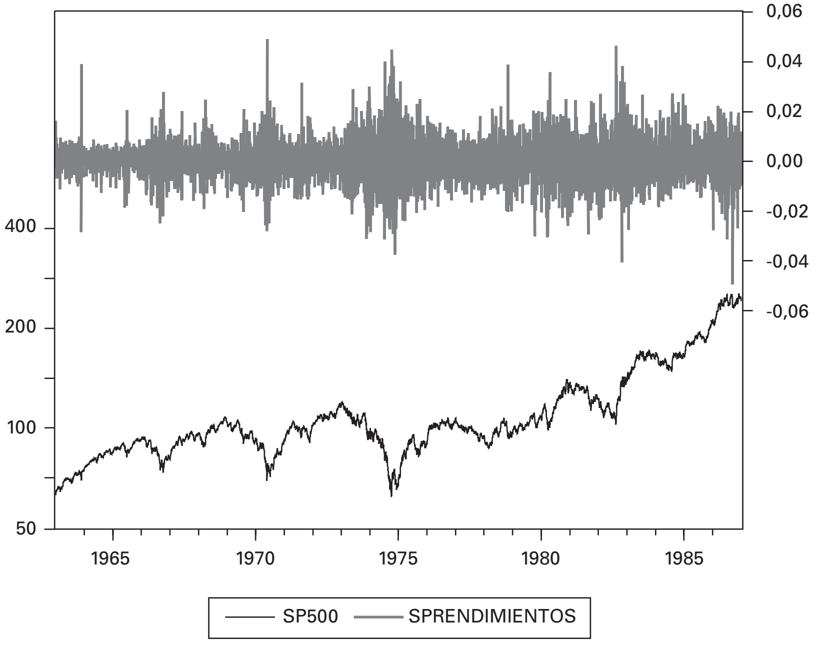


economistas centran su atención sobre los rendimientos, que se muestran en la parte superior del gráfico. Éste muestra el cambio diario en el precio en el eje de la derecha (calculado como el logaritmo del precio de hoy dividido por el precio de ayer). Esta serie de rendimientos está centrada en cero a lo largo del periodo de la muestra aunque a veces los precios aumenten y otras veces disminuyan. El acontecimiento más dramático es el crac de octubre de 1987 que hace que todos los demás rendimientos sean comparativamente minúsculos en lo que se refiere al tamaño de la caída y a la subsiguiente recuperación parcial.

Se pueden observar otras de las características importantes de esta serie de datos trabajando con porciones del periodo completo. Por ejemplo, el gráfico 2 muestra el mismo gráfico antes de 1987. Se ve claramente que la amplitud de los rendimientos está cambiando. La magnitud de los cambios es grande en ocasiones y reducida en otras. Precisamente éste es el efecto que el modelo ARCH se encarga de medir y que hemos denominado agrupamiento de la volatilidad. Pero hay otra característica importante en este gráfico. La volatilidad es claramente superior cuando los precios están cayendo. La volatilidad tiende a ser superior en mercados con tendencia a la baja. Este es el efecto de volatilidad asimétrica que Nelson describe con su modelo EGARCH.

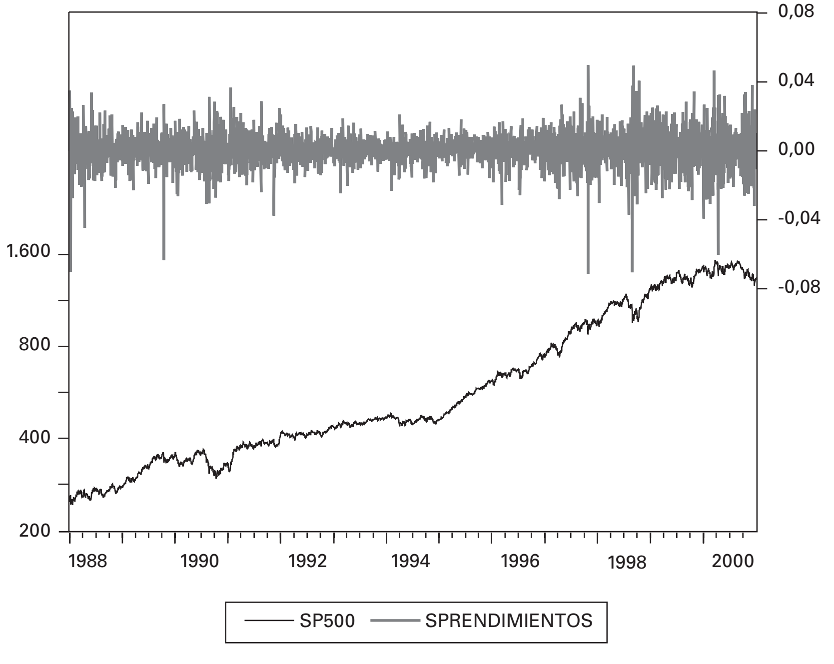
Si examinamos el siguiente subperiodo, el posterior al crac de 1987, en el gráfico 3 podemos ver el periodo record de baja volatilidad de mediados de la década de los 90. Este periodo vino acompañado por un

Gráfico 2
ÍNDICE DIARIO S&P 500 ANTES DE 1987



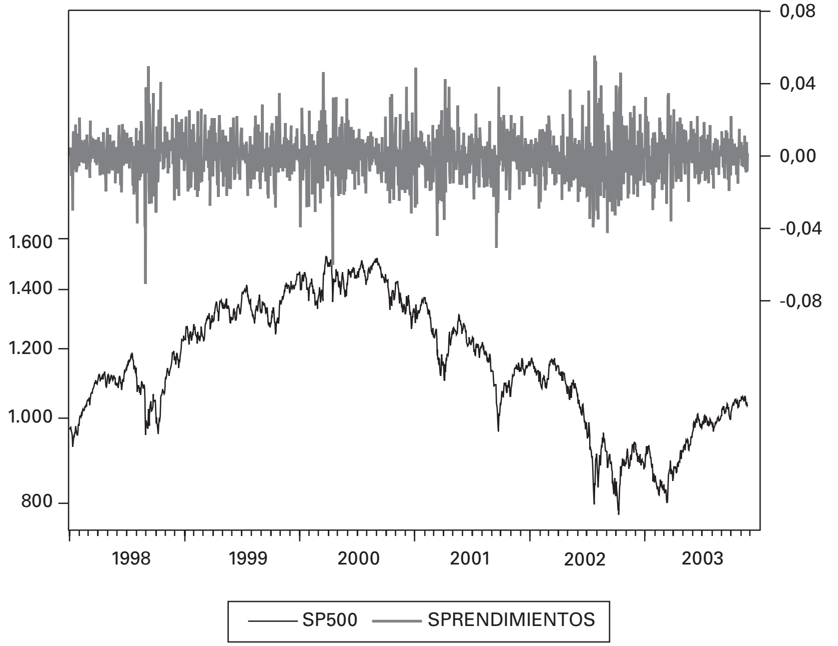
crecimiento lento y sostenido de los precios de las acciones. Frecuentemente se sostuvo que nos estábamos encaminando hacia una nueva era de baja volatilidad. La historia ha demostrado que no. La volatilidad comenzó a aumentar al tiempo que los precios de las acciones se incrementaban progresivamente, alcanzando niveles muy altos desde 1998 en adelante. La bolsa, desde esta perspectiva, resultaba claramente arriesgada, pero los inversores estaban dispuestos a tomar este riesgo debido a los altos rendimientos que podía aportar. Si nos fijamos en el último periodo, desde 1998, en el gráfico 4 podemos ver que la alta volatilidad perduró mientras el mercado caía. Sólo al final de la muestra, cuando concluyó oficialmente la guerra en Irak, se ven disminuciones importantes en la volatilidad. Esto aparentemente ha animado a que los inversores volvieran al mercado, que ha experimentado un crecimiento substancial de los precios.

Gráfico 3
ÍNDICE S&P 500 DESDE 1988 HASTA 2000



Mostramos ahora algunos estadísticos que ilustran los tres hechos estilizados mencionados anteriormente: rendimientos prácticamente impredecibles, colas gordas y agrupamiento de la volatilidad. En el cuadro 1 se muestran algunas características de los rendimientos. En comparación con la desviación típica, la media se aproxima a cero para ambos periodos. Se sitúa en el 0,03 por ciento por día de apertura o alrededor de un 7,8 por ciento por año. La desviación típica es ligeramente superior en los años 90. Estas desviaciones corresponden a volatilidades anualizadas del 15 y del 17 por ciento. La asimetría es reducida en todo el periodo.

Gráfico 4
ÍNDICE S&P 500 DESDE 1998 HASTA 2003

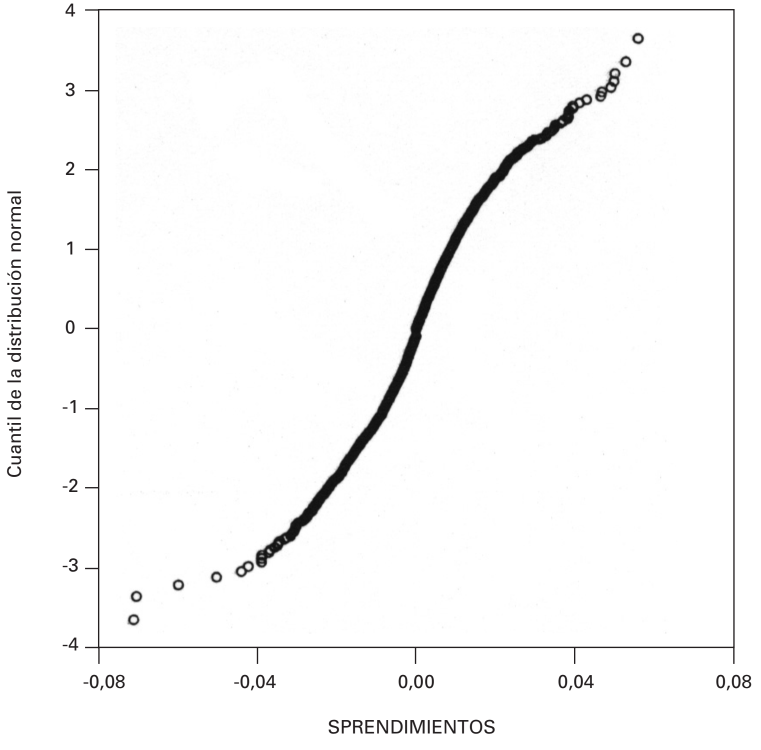


Cuadro 1
RENDIMIENTOS DEL S&P 500

Muestra	Completa	Desde 1990
Media	0,0003	0,0003
Desviación típica	0,0094	0,0104
Asimetría	–1,44	–0,10
Curtosis	41,45	6,78

La característica más interesante es la curtosis que mide la magnitud de los extremos. Si los rendimientos se distribuyesen según una normal, la curtosis debería ser igual a 3. La curtosis de los noventa alcanzaba un valor de 6,8, y para el conjunto de la muestra un impresionante 41. Ésta es una prueba clara de que los extremos son más importantes de lo que podríamos esperar de una variable aleatoria normal. Se obtiene la misma evidencia del gráfico 5, que es un diagrama de los cuantiles de los datos posteriores a 1990. Sería una línea recta si los rendimientos se distribuyesen normalmente y tiene forma de S si hay más valores extremos.

Gráfico 5
GRÁFICO DE LOS CUÁNTILES DE LOS RENDIMIENTOS DEL ÍNDICE S&P 500 POSTERIORES A 1990

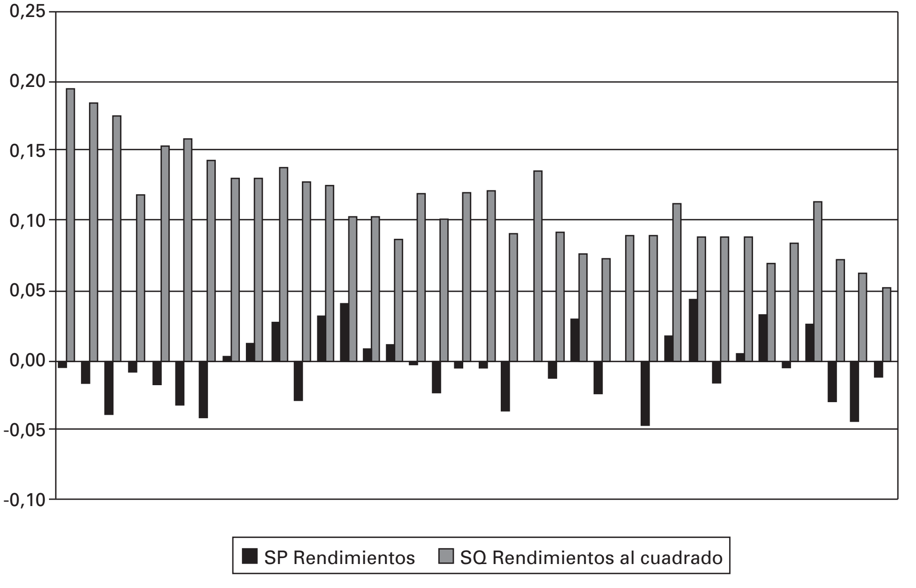


La impredecibilidad de los rendimientos y el agrupamiento de la volatilidad se pueden mostrar de forma concisa en las autocorrelaciones. Las autocorrelaciones son correlaciones calculadas entre el valor de una variable aleatoria hoy y su valor de hace unos días. Las autocorrelaciones significativas de los rendimientos pueden ser un indicio de la predictibilidad de la serie, mientras que las autocorrelaciones significativas de los rendimientos al cuadrado o en términos absolutos reflejan la existencia de agrupamiento de la volatilidad. En el gráfico 6 se representan estas autocorrelaciones para los datos posteriores a 1990. Bajo los criterios convencionales[1], las autocorrelaciones superiores a 0,033 en valor absoluto serían significativas a un nivel del 5 por ciento. Las autocorrelaciones del rendimiento son claramente casi todas no significativas, mientras que los rendimientos al cuadrado tienen casi todos autocorrelacio-

(1) Los valores críticos reales serán algo superiores dado que las series presentan, claramente, heteroscedasticidad. Esto hace que la no predictibilidad de los rendimientos sea aún más probable.

nes que sí lo son. Además, las autocorrelaciones de los rendimientos al cuadrado son todas positivas, lo cual es muy poco probable que ocurra por casualidad. Este gráfico proporciona pruebas de peso tanto de la no predictibilidad de los rendimientos como del agrupamiento de la volatilidad.

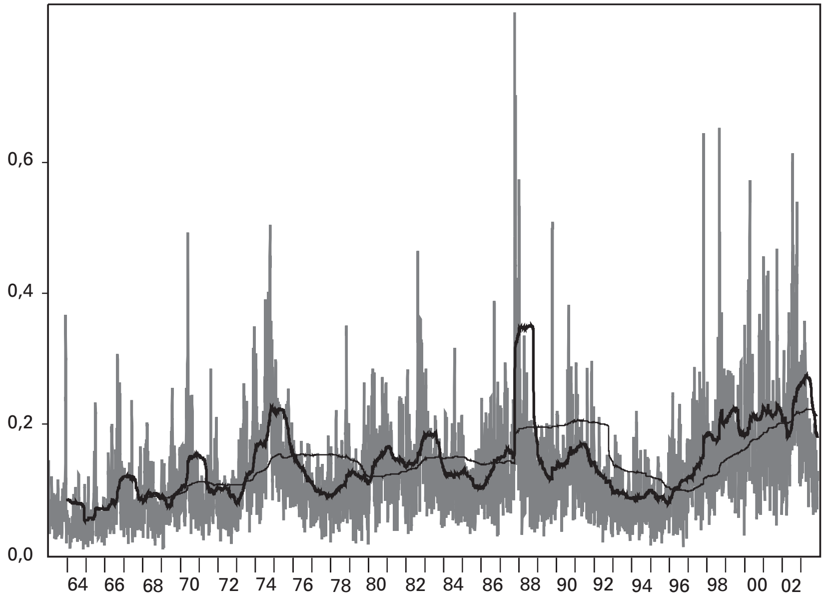
Gráfico 6
AUTOCORRELACIÓN DE LOS RENDIMIENTOS Y DE LOS RENDIMIENTOS AL CUADRADO



Abordamos ahora el problema de la estimación de la volatilidad. Las estimaciones llamadas volatilidad histórica se basan en las desviaciones típicas de los rendimientos calculadas sobre periodos de tiempo sucesivos tomando una ventana de datos fija. En el gráfico 7 se han construido con ventanas de cinco días, de un año y de cinco años. Mientras que cada uno de estos cálculos podría parecer razonable, las respuestas son claramente muy diferentes. La estimación sobre cinco días es extremadamente variable mientras que las otras dos son mucho más suaves. La estimación sobre cinco años es suave en los lugares en que las otras dos estimaciones revelan picos y caídas. Con esta ventana, la recuperación tras el crac de 1987 es particularmente lenta, como también lo es la aparición del aumento de la volatilidad en 1998-2000. De la misma manera, la estimación anual no muestra todos los detalles que revela la volatilidad de cinco días. Pero algunos de estos detalles podrían no ser más que ruido. Sin ninguna medida verdadera de volatilidad, es difícil elegir entre estos candidatos.

El modelo ARCH proporciona una solución a este dilema. Estimando los parámetros desconocidos basándonos en datos históricos, podemos obtener predicciones para cada día en el periodo de la muestra y para cualquier periodo posterior a la muestra. El primer modelo a estimar que se impone de manera natural sería el GARCH (1,1). Este modelo da ponderaciones a la varianza incondicional, a la predicción anterior y a las nuevas informaciones medidas como el cuadrado del rendimiento de ayer. El valor estimado de las ponderaciones es 0,004; 0,941 y 0,055 respectivamente[2]. El grueso de la información viene claramente de la predicción del día anterior. La información nueva la cambia ligeramente y la varianza media a largo plazo tiene un efecto muy pequeño. El efecto de la varianza a largo plazo resulta ser tan reducido que podría no ser importante. Esto no es del todo correcto. Cuando predecimos para un horizonte lejano, la varianza a largo plazo acaba dominando al ir desapareciendo la importancia de las informaciones nuevas y recientes. Es pequeña como consecuencia natural del uso de datos diarios.

Gráfico 7
VOLATILIDAD HISTÓRICA CON DISTINTAS VENTANAS



En este ejemplo, usaremos un modelo de volatilidad asimétrica que, a veces, recibe el nombre de GJR-GARCH, respondiendo a las siglas de Glosten *et al* (1993), o de TARCH (por *Threshold ARCH*) de Jean Michael Zakoian (1994). Los resultados estadísticos se ofrecen en el cuadro 2. En

(2) Para un modelo GARCH convencional definido como $h_{t+1} = \omega + \alpha r_t^2 + ß h_t$, las ponderaciones son $((1 - \alpha - ß), ß, \alpha)$.

este caso, hay dos tipos de información nuevas. El rendimiento al cuadrado, por un lado, y, por otro, otra variable que es el rendimiento al cuadrado cuando los rendimientos son negativos y que es nula en el caso contrario. Éste es, en promedio, la mitad de grande que la varianza y por lo tanto debería duplicarse, lo cual implica que las ponderaciones se reducirían a la mitad. Las ponderaciones se calculan ahora sobre la media a largo plazo, la predicción anterior, las noticias simétricas así como las noticias negativas. Estas ponderaciones se estiman en 0,002; 0,931; 0,029 y 0,038, respectivamente[3]. Es evidente que la asimetría es importante ya que, sin ella, el último término sería cero. De hecho, los rendimientos negativos en este modelo tienen un efecto más de tres veces superior al de los rendimientos positivos de varianzas futuras. Desde el punto de vista estadístico, el término asimétrico tiene un estadístico *t* de casi 20 y resulta muy significativo.

Cuadro 2
ESTIMACIÓN TARCH DE LOS DATOS DE RENDIMIENTO DEL S&P 500

Variable dependiente: NEWRET_SP
Método de estimación: ML-ARCH (Marquardt)
Periodo muestral ajustado: 3-I-1963 / 21-XI-2003
Nº de observaciones: 10.667 después de ajustar por los puntos finales
Convergencia alcanzada después de 22 iteraciones
Predicción hacia atrás de la varianza: activada

	Coeficiente	Error estándar	Estadístico-z	Probabilidad
C	0,000301	6,67E-05	4,512504	0,0000
	Ecuación de la varianza			
C	4,55E-07	5,06E-08	8,980473	0,0000
ARCH(1)	0,028575	0,003322	8,602582	0,0000
(RESID < 0)*ARCH(1)	0,076169	0,003821	19,93374	0,0000
GARCH(1)	0,930752	0,002246	414,4693	0,0000

La serie de volatilidad generada por este modelo se puede ver en el gráfico 8. La serie tiene más picos que las volatilidades históricas anuales o quinquenales, pero es menos variable que las volatilidades de cinco días. Dado que está diseñada para medir la volatilidad de los rendimientos del día siguiente, es lógico formar intervalos de confianza para los rendimientos. En el gráfico 9, los rendimientos se representan junto con

(3) Si el modelo está definido como $h_t = \omega + \beta h_{t-1} + \alpha r^2_{t-1} + \gamma r^2_{t-1} I_{r_{t-1} < 0}$, entonces las ponderaciones son $(1 - \alpha - \beta - \gamma/2, \beta, \alpha, \gamma/2)$.

más/menos tres desviaciones típicas TARCH. Claramente, los intervalos de confianza están cambiando de una forma muy verosímil. Una banda constante sería demasiado ancha en ciertos periodos y demasiado estrecha en otros. Los intervalos TARCH deberían tener una probabilidad del 99,7 por ciento de incluir la siguiente observación si en la realidad los datos se distribuyeran normalmente. Se esperaría entonces que el siguiente rendimiento estuviera fuera del intervalo solamente en 29 de los más de 10.000 días. En realidad, hay 75, lo que indica que hay más observaciones atípicas de lo que podríamos esperar de una distribución normal.

El mercado de opciones contiene información adicional sobre la volatilidad. El valor de las opciones negociadas depende directamente de la volatilidad del activo subyacente. Una cartera de opciones creada concienzudamente con diferentes precios de ejercicio tendrá un valor que mide la estimación del mercado de opciones de la volatilidad futura bajo supuestos más bien débiles. El cálculo se realiza ahora por el CBOE para las opciones S&P 500 y se presenta como el VIX. Hay dos supuestos subyacentes en este índice que merece la pena mencionar. El proceso de los precios debería ser continuo y no debería haber prima de riesgo asociada a los shocks de volatilidad. Si estos supuestos son aproximaciones adecuadas, las volatilidades implícitas pueden compararse con las volatilidades ARCH. Las volatilidades TARCH deben ser predicciones a un mes, ya que esto representa la volatilidad promedio sobre la vida de la opción, que es la que debe compararse con las volatilidades implícitas.

Gráfico 8
VOLATILIDADES GARCH

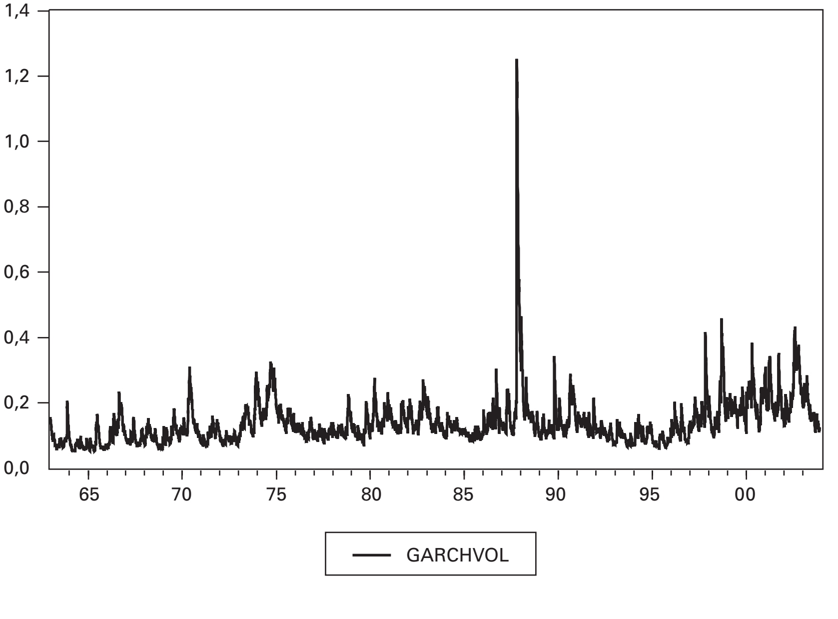


Gráfico 9
INTERVALOS DE CONFIANZA GARCH: TRES DESVIACIONES TÍPICAS

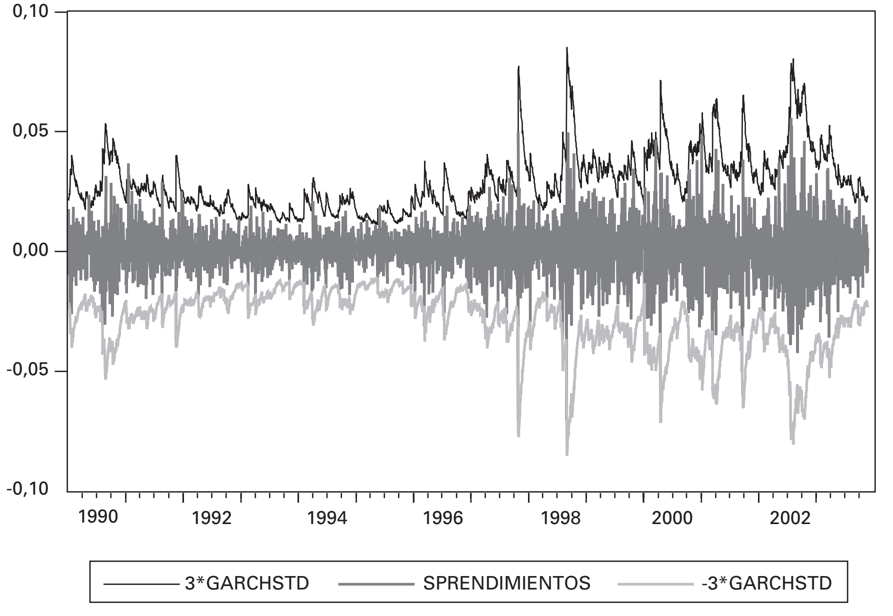
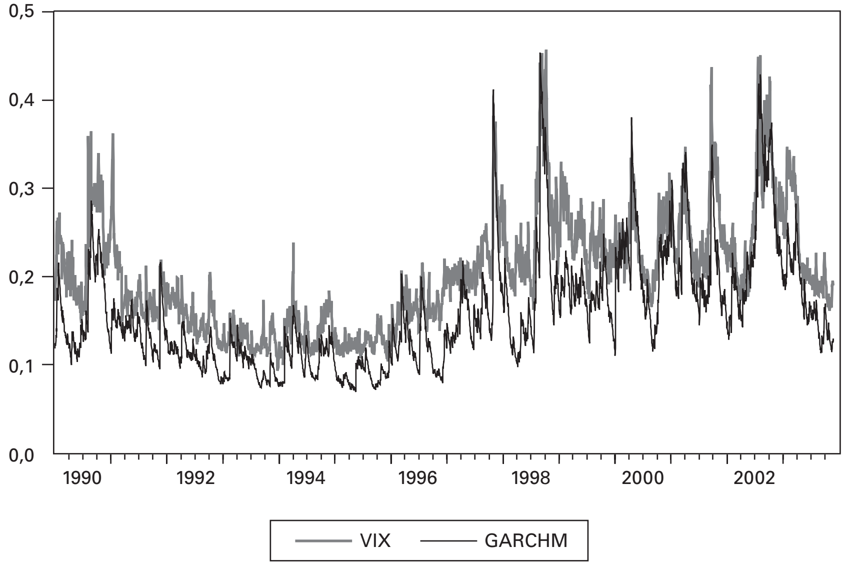


Gráfico 10
VOLATILIDADES IMPLÍCITAS Y VOLATILIDADES GARCH



Los resultados están representados en el gráfico 10[4]. El patrón general es bastante parecido, aunque el TARCH está ligeramente por debajo del VIX. Estas diferencias se pueden atribuir a dos causas. En primer lugar, la relación para la valoración de opciones no es del todo correcta en esta situación y no toma en cuenta ni la prima de riesgo de volatilidad ni la posibilidad de rendimientos no normales. Estos ajustes llevarían a precios de opciones más elevados y, por lo tanto, a volatilidades implícitas que serían demasiado elevadas. En segundo lugar, los modelos ARCH básicos tienen conjuntos de información muy limitados. No usan información relativa a los beneficios, las guerras, las elecciones, etc. De hecho, las predicciones de volatilidad de los operadores deberían ser normalmente superiores y las diferencias podrían deberse a la información sobre acontecimientos de larga duración.

Este largo ejemplo ilustra muchas de las características de los modelos ARCH/GARCH y cómo se pueden usar para estudiar procesos de volatilidad. Pasaremos ahora a la práctica financiera y describiremos dos aplicaciones ampliamente utilizadas. En la presentación, ilustraremos algunas implicaciones novedosas de la volatilidad asimétrica.

6. Práctica financiera: el valor en riesgo

Cada mañana, en miles de bancos e instituciones de servicios financieros del mundo entero, el Director de Gestión del Riesgo le presenta al Director General el perfil de riesgo del banco. Recibe una estimación del riesgo del conjunto de la cartera y del riesgo de muchos de sus componentes. Normalmente, sabrá en ese momento cuál es el riesgo al que se enfrentan su Departamento de acciones del mercado europeo, su Departamento de deuda del estado, su Unidad de divisas, su Unidad de derivados, etcétera. Incluso, se podrían detallar los riesgos por analistas financieros. Se le proporciona entonces una perspectiva general al sistema regulador, aunque puede que no sea la misma que la empleada para fines internos. El riesgo para la compañía como conjunto es menor que la suma de todas sus partes ya que las diferentes porciones del riesgo no estarán correlacionadas perfectamente.

La medida típica de cada uno de estos riesgos es el Valor en Riesgo (*Value at Risk*), que a menudo se abrevia por VaR. El VaR es una forma de medir la probabilidad de pérdidas que podría sufrir la cartera. El VaR a un día al 99 por ciento es un importe en dólares con el que el director indica que está seguro al 99 por ciento de que cualquier pérdida que pueda tener lugar al día siguiente no superará dicho importe. Si el VaR a un día del departamento de divisas es de 50.000 dólares, esto significa que el gerente del riesgo afirma que sólo en un día de entre 100 habrá perdidas superiores a 50.000 dólares en esa cartera. Esto significa, por supuesto, que, aproximadamente, en dos días y medio al año las pérdidas serán superiores al VaR. El VaR es una forma de medir el riesgo que es fácil de entender sin tener conocimientos de estadística. Sin embargo, no es más que un cuantil de la distribución predictiva y, por lo tanto, tiene información limitada sobre las probabilidades de pérdida.

---

(4) El VIX está ajustado para un año de 252 días de transacciones.

En ocasiones se define el VaR sobre una base de varios días. Un VaR del 99 por ciento a diez días es una cantidad de dólares superior a la pérdida realizada en la cartera a lo largo de diez días con probabilidad 0,99. Éste es un estándar común en las normas vigentes, pero se calcula normalmente ajustando simplemente el VaR a un día, tal y como veremos más adelante. Las cifras de pérdida suponen que la cartera no cambia en el periodo de diez días, lo cual puede ir contra los hechos.

Para calcular el VaR de una unidad de negocio o de una empresa en su conjunto, es necesario tener varianzas y covarianzas o, lo que es lo mismo, volatilidades y correlaciones para todos los activos que se encuentran en la cartera. Normalmente, se considera que los activos responden principalmente a uno o más factores de riesgo que se modelan directamente. Riskmetrics™, por ejemplo, emplea unos 400 factores de riesgo mundiales. BARRA emplea factores de riesgo industriales así como factores de riesgo basados en las características de la compañía y otros factores. Una cartera diversificada de renta variable de Estados Unidos tendría riesgos determinados principalmente por los índices agregados de mercado como por ejemplo el S&P 500. Seguiremos con el ejemplo de la sección anterior para calcular el VaR de una cartera que mimetice el S&P.

El VaR a un día, y al 99 por ciento, del S&P se puede estimar empleando el enfoque ARCH. Sobre la base de datos históricos, se estima el mejor modelo, y luego se calcula la desviación típica para el día siguiente. En el caso de S&P del 24 de noviembre, esta predicción para la desviación típica es de 0,0076. Para transformarlo en VaR, tenemos que hacer un supuesto sobre la distribución de los rendimientos. Si suponemos normalidad, el cuantil del 1 por ciento se sitúa a –2,33 desviaciones típicas de cero. Así, el Valor en Riesgo es 2,33 veces la desviación típica o, en el caso del 24 de noviembre, el 1,77 por ciento. Podemos estar seguros al 99 por ciento de que no perderemos más del 1,77 por ciento del valor de la cartera el 24 de noviembre. De hecho el mercado evolucionó al alza el día 24, es decir que no hubo pérdidas.

El supuesto de normalidad es muy cuestionable. Hemos observado que los rendimientos financieros tienen una cantidad sorprendente de rendimientos altos. Si dividimos los rendimientos por las desviaciones típicas TARCH, el resultado tendrá una volatilidad constante de uno, pero tendrá una distribución no normal. La curtosis de estos “rendimientos desvolatilizados” o “residuos estandarizados” es 6,5, lo cual es muy inferior a la curtosis incondicional, pero sigue siendo bastante más de la curtosis normal. Con estos rendimientos desvolatilizados podemos encontrar el cuantil del uno por ciento y utilizarlo para dar una idea mejor del VaR. Resulta ser 2,65 desviaciones típicas por debajo de la media. De esta manera, nuestra cartera es más arriesgada de lo que pensábamos con la aproximación normal. El VaR a un día al 99 por ciento se estima ahora en el 2 por ciento.

A menudo las agencias de regulación requieren un VaR a diez días, y se utiliza también frecuentemente a nivel interno. Por supuesto, la cantidad que puede perder una cartera en diez días es mucho mayor de lo que puede perder en un día. Pero, ¿cuán mayor es? Si las volatilidades fuesen constantes, la respuesta sería simple; será superior por un factor multiplicativo igual a la raíz cuadrada de diez. Dado que la varianza a diez días es diez veces la varianza a un día, el multiplicador de la volatilidad de diez días sería la raíz cuadrada de diez. Cogeríamos la desviación típica de un día y la multiplicaríamos por 3,16 y, después, la multiplicaríamos, bajo el supuesto de normalidad, por 2,33, lo cual nos daría la desviación estándar multiplicada por 7,36. Ésta es la solución convencional en la práctica. Para el 24 de noviembre, el VaR a diez días al 99 por ciento es el 5,6 por ciento del valor de la cartera.

Sin embargo, este resultado no tiene en cuenta dos características muy importantes de los modelos de volatilidad dinámica. En primer lugar, no da lo mismo que las volatilidades reales sean bajas o altas en relación con la media a largo plazo, ya que son predicciones de subidas o de bajadas para los próximos diez días. Dado que la volatilidad es relativamente baja en noviembre, el modelo TARCH predecirá un aumento para los siguientes 10 días. En este caso, este efecto no es muy grande porque se predice que la desviación estándar aumente de 0,0076 a 0,0077 durante el periodo de 10 días.

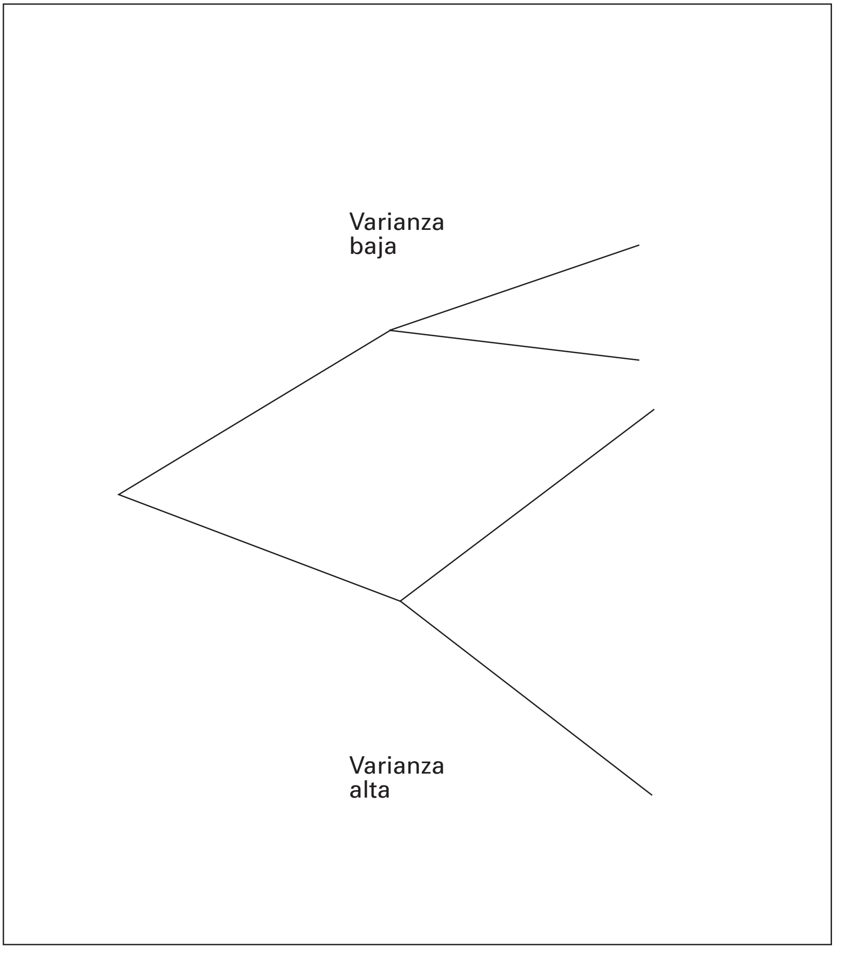
El efecto de asimetría en la varianza para rendimientos multiperiodos resulta más interesante. A pesar de que cada periodo tiene una distribución simétrica, la distribución del rendimiento multiperiodo será asimétrica. Es fácil entender este efecto, pero no ha sido reconocido en general. Se puede ilustrar fácilmente con un árbol binomial en dos etapas (ver gráfico 11), tal y como se hace en los modelos básicos de valoración de opciones. En el primer periodo, el precio del activo puede aumentar o disminuir y cualquier resultado es igual de probable. En el segundo periodo, la varianza dependerá de si el precio aumentó o disminuyó. Si aumentó, la varianza será inferior, de tal manera que las ramas binomiales estarán bastante próximas. Si el precio disminuyó, la varianza será superior, de tal manera que los resultados estarán más separados. Después de los dos periodos, hay cuatro resultados que son igual de probables. La distribución será bastante asimétrica, ya que el resultado malo es mucho peor que el que se tendría si la varianza hubiera sido constante.

Para calcular el VaR en este planteamiento, se necesita una simulación. El modelo TARCH se simula para diez días utilizando variables aleatorias normales y empezando con valores del 21 de noviembre[5]. Esto se hizo 10.000 veces y se ordenaron los peores resultados para encontrar el Valor en Riesgo correspondiente al cuantil del 1 por ciento. La respuesta fue 7,89 veces la desviación típica. Este VaR es bastante mayor que el valor que obtendríamos bajo el supuesto de volatilidad constante.

(5) En este ejemplo, se inició la simulación con la varianza incondicional de tal manera que el efecto de agregación temporal puediese ser examinado de forma independiente. Además, se estableció la media en cero, pero esto no tiene mucho efecto en horizontes tan cortos

Para evitar el supuesto de normalidad, la simulación puede hacerse también empleando la distribución empírica de los residuos estandarizados. Esta simulación se llama a menudo simulación *bootstrap*; cada extracción de las variables aleatorias tiene exactamente la misma probabilidad de ser cualquier observación de los residuos estandarizados. Puede ser que la observación del crac de octubre de 1987 se extrajera una o incluso dos veces en algunas simulaciones pero ninguna en otras. El resultado es un multiplicador de la desviación típica de 8,52 que se debería usar para calcular el VaR. En nuestro caso, para el 24 de noviembre, el VaR a diez días al 99 por ciento es el 6,5 por ciento del valor de la cartera.

Gráfico 11
ÁRBOL BINOMIAL A DOS PERIODOS CON VOLATILIDAD ASIMÉTRICA



7. Práctica financiera: la valoración de opciones

Otra rama importante de la práctica financiera es la valoración y la gestión de derivados como las opciones. Éstas se suelen valorar de forma teórica, suponiendo la existencia de un determinado proceso para el activo subyacente y, sobre dicha base, los precios de mercado de los derivados se infieren de los parámetros del proceso que sigue el activo subyacente. Esta estrategia se suele denominar "valoración libre de arbitraje" ("*arbitrage free pricing*") y resulta inadecuada para algunas de las tareas del análisis financiero. No puede determinar el riesgo de una posición en derivados porque cada nuevo precio de mercado podría corresponder a un conjunto diferente de parámetros y son justamente el tamaño y la frecuencia de los cambios en estos parámetros los que representan un riesgo. Por la misma razón, es difícil encontrar estrategias óptimas de protección contra el riesgo. Finalmente, no hay ninguna manera de determinar el precio de una nueva emisión o determinar si ciertos derivados se están vendiendo con descuentos o con primas.

Un análisis similar que, a menudo, se lleva a cabo por los operadores de derivados consiste en desarrollar modelos de valoración basados en las variables fundamentales (*fundamentals pricing models*), que determinan el precio apropiado para un derivado basándose en las características del activo subyacente. Estos modelos podrían incluir medidas del coste de transacción, del coste de cobertura y del riesgo en la gestión de la cartera de opciones.

En esta sección se usará un modelo simple de valoración de opciones basado en una simulación para ilustrar el empleo de modelos ARCH en este tipo de análisis fundamental. El ejemplo será la valoración de opciones *put* en el S&P 500, a las cuales les quedan 10 días para llegar al vencimiento.

Una opción *put* proporciona al propietario el derecho de vender un activo, a su vencimiento, a un precio determinado, llamado precio de ejercicio. De esta manera, si el precio del activo está por debajo del precio de ejercicio, puede ganar dinero vendiendo al precio de ejercicio y comprando a precio de mercado. El beneficio será la diferencia entre estos precios. Sin embargo, si el precio del mercado es superior al precio de ejercicio, entonces la opción no tiene valor. Si el inversor posee el activo subyacente en su cartera y compra una opción *put*, tendrá la garantía de obtener como mínimo el precio de ejercicio en el vencimiento. Por eso, estas opciones pueden considerarse como contratos de seguro.

La simulación funciona exactamente igual que en la sección anterior. El modelo TARCH se simula desde el final del periodo de la muestra 10.000 veces. Adoptamos el enfoque *bootstrap*, así que la no normalidad está incorporada ya en la simulación. Esta simulación debería ser de la distribución "neutral al riesgo", es decir una distribución en la cual los activos se valorasen en sus valores esperados descontados. La distribución neutral al riesgo difiere de la distribución empírica en aspectos sutiles, de tal manera que hay una prima de riesgo explícita en la distribución empírica, que no es necesaria en la distribución neutral al riesgo. En algunos modelos, como el de Black-Scholes, basta con ajustar la media para que ésta sea la tasa libre de riesgo. Esto es lo que haremos en el ejemplo. Se simula la distribución con una media cero, que se considera la tasa libre de riesgo. Como veremos más adelante, este ajuste podría ser no suficiente como para obtener la distribución neutral al riesgo.

Con la simulación, tenemos 10.000 resultados con igual probabilidad para diez días futuros. Podemos calcular el valor de una determinada opción *put* para cada uno de estos resultados. Dado que éstos son igual de probables y que la tasa libre de riesgo se considera igual a cero, la mejor estimación del valor intrínseco de la opción *put* es la media de estos valores. Esto se puede hacer para opciones *put* con diferentes precios de ejercicio. El resultado se muestra en el gráfico 12. Se supone que el S&P empieza en 1.000 de tal manera que una opción establecida con un precio de ejercicio de 990 protegerá ese valor por diez días. Esta opción *put* debería venderse por 11 dólares. El proteger la cartera en su valor actual costaría 15 dólares y asegurarse de que valiese al menos 1.010 nos costaría 21 dólares. El VaR calculado en la sección anterior costaba 65 dólares para un horizonte de 10 días. Proteger la cartera en este nivel costaría unos 2 dólares. Estos precios *put* tienen la forma esperada; son monótonos crecientes y convexos.

Gráfico 12
PRECIOS DE OPCIONES *PUT* OBTENIDOS CON LA SIMULACIÓN GARCH

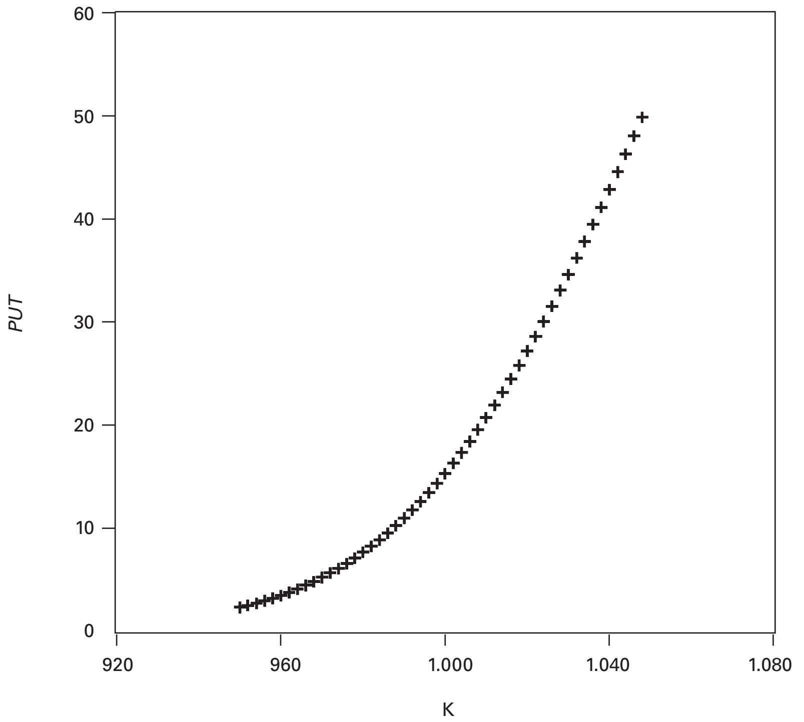
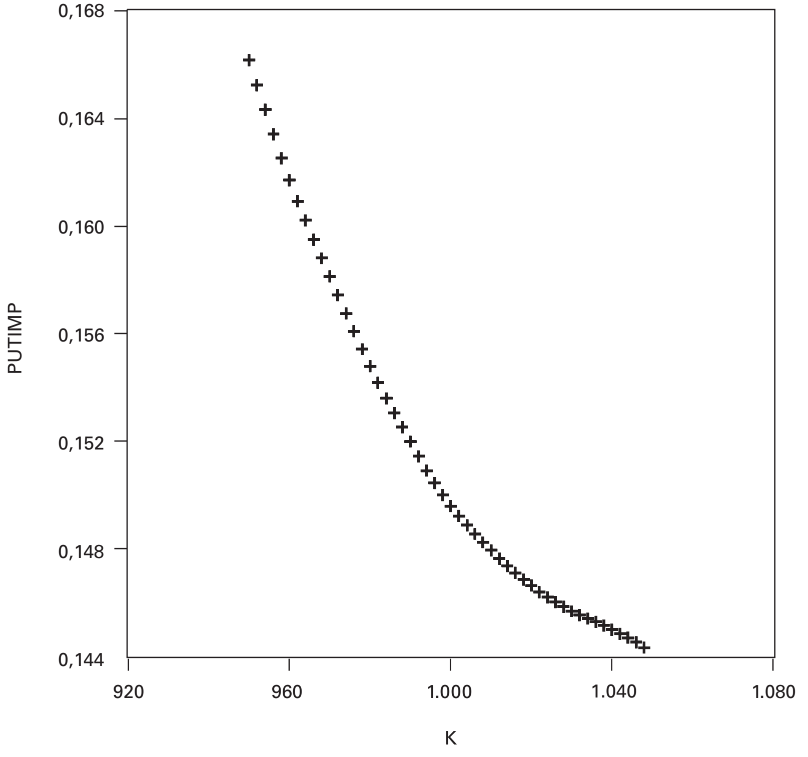


Gráfico 13
VOLATILIDADES IMPLÍCITAS OBTENIDAS CON LA SIMULACIÓN GARCH



Sin embargo, estos precios son claramente diferentes de los generados por el modelo Black-Scholes. Esto se puede ver fácilmente calculando la volatilidad implícita en cada una de estas opciones *put*. Se puede ver el resultado en el gráfico 13. Las volatilidades implícitas son superiores para las opciones *put* fuera del dinero (*out-of-the money*) que para las opciones *put* cuyo precio de ejercicio coincide con el precio del subyacente (en el dinero, *at-the-money*) y las volatilidades de las opciones *put* dentro del dinero (*in-the-money*) son incluso inferiores. Si los precios de las opciones *put* los generase el modelo Black-Scholes, estas volatilidades implícitas serían todas iguales. Este gráfico de las volatilidades implícitas en función del precio de ejercicio es una herramienta muy utilizada por los que negocian opciones. La curva decreciente recibe el nombre de "asimetría de volatilidad" ("*volatility skew*") y corresponde a una distribución asimétrica de los activos subyacentes. Esta característica se manifiesta de una forma muy pronunciada en las opciones sobre índices, no tanto en las opciones sobre acciones individuales, y prácticamente no se da cuando se trata de divisas, en cuyo caso se habla de "sonrisa de volatilidad" ("*smile*"). Es evidente que se trata de una consecuencia del modelo de volatilidad asimétrica y, por lo mismo, no se encuentra asimetría en el caso de las divisas, y esta asimetría es más débil cuando se trata de opciones sobre acciones individuales que cuando son sobre índices.

Esta característica de los precios de las opciones constituye una confirmación contundente de los modelos de volatilidad asimétrica. Desgraciadamente, la historia es algo más compleja que esto. La verdadera asimetría de las opciones es, por lo general, algo más fuerte que la que generan los modelos asimétricos ARCH. Esto pone en tela de juicio la neutralización del riesgo adoptada en la simulación. Existen cada vez más pruebas de que los inversores están particularmente preocupados por las grandes pérdidas y están dispuestos a pagar primas extra para evitar dichas pérdidas. Esto hace que la asimetría sea aún mayor. La neutralización del riesgo requerida la han estudiado diferentes autores, como Jens C. Jackwerth (2000), Joshua V. Rosenberg y Engle (2002) y David S. Bates (2003).

8. Nuevas fronteras

Desde que se publicó el artículo del ARCH, han pasado ya más de 20 años. Los desarrollos y aplicaciones que se han llevado a cabo han ido mucho más allá de las previsiones más optimistas. Pero, ¿qué podemos esperar en el futuro? ¿Cuáles serán las próximas fronteras?

Parece haber dos fronteras importantes para la investigación, que están mereciendo la atención de varios investigadores y que son muy prometedoras respecto a las aplicaciones. Se trata de los modelos de volatilidad de alta frecuencia y de los modelos multivariantes de gran dimensión. Haré una descripción breve de algunos de los desarrollos prometedores en estos campos.

Es probable que fuese Merton el primero en destacar los beneficios de los datos de alta frecuencia para el cálculo de la volatilidad. Examinando el comportamiento de los precios de las acciones en una escala de tiempo cada vez más reducida, se pueden conseguir medidas de la volatilidad cada vez mejores. Esto resulta muy útil si la volatilidad cambia sólo lentamente, de tal manera que se puedan ignorar las consideraciones dinámicas. Andersen y Bollerslev (1998a) destacaron que los datos intra-diarios podían emplearse para medir la validez de los modelos de volatilidad diaria. Andersen *et al.* (2003) y Engle (2002b) sugieren cómo se pueden emplear los datos intra-diarios para formar mejores predicciones de la volatilidad diaria.

Sin embargo, la pregunta más interesante es cómo usar los datos de alta frecuencia para obtener predicciones de volatilidad de alta frecuencia. Al emplear observaciones de frecuencia cada vez más elevada, hay aparentemente un límite dado por el periodo en el que se observa y se emplea cada transacción. Engle (2000) denomina a estos datos con el rótulo de "datos de *frecuencia ultra-alta*" ("*ultra high frecuency* data").

Estas transacciones ocurren a intervalos irregulares y no en momentos equidistantes en el tiempo. En principio, se podría diseñar un estimador de la volatilidad que actualizase la volatilidad cada vez que se registrase una operación. Sin embargo, incluso la ausencia de operación podría ser información útil para la actualización de la volatilidad, así que se podrían hacer actualizaciones incluso más frecuentes. Dado que el momento en que llega una operación es aleatorio, la formulación de modelos de volatilidad de frecuencia ultra alta requiere un modelo del proceso de llegada de las operaciones. Engle y Jeffrey R. Russell (1998) proponen para ello el modelo autorregresivo de duración condicionada o modelo ACD (*Autoregressive Conditional Duration*). Es un modelo muy parecido a los modelos ARCH diseñados para detectar el agrupamiento de operaciones o de otros acontecimientos económicos, que utiliza esta información para predecir la probabilidad de llegada del siguiente acontecimiento.

Muchos investigadores que realizan trabajos empíricos en micro estructura de mercados están estudiando ahora aspectos de los mercados financieros que tienen relevancia para este problema. Resulta que cuando las operaciones se aglutinan la volatilidad es más alta. Las operaciones en sí conllevan información que hará que se muevan los precios. Un comprador de talla media o grande hará que suban los precios, por lo menos en parte, porque los agentes del mercado pueden considerar que podría tener información importante que indique que la acción está subvalorada. Este efecto recibe el nombre de impacto del precio y es un componente central de *riesgo de liquidez* y una característica clave de volatilidad para datos de frecuencia ultra-alta. También constituye un elemento de preocupación clave para los operadores que no quieren operar si saben que tendrán un impacto grande sobre los precios, especialmente si se trata sólo de un impacto temporal. A medida que los mercados financieros se informatizan, la velocidad y frecuencia de las operaciones aumenta. Los métodos de utilización de esta información, para lograr una mejor comprensión de los fenómenos de volatilidad y de estabilidad de estos mercados, serán cada vez más importantes.

La otra frontera que promete, a mi parecer, grandes desarrollos y aplicaciones es la de los sistemas *de gran dimensión*. En esta presentación me he centrado en la volatilidad de un único activo. Para la mayoría de las aplicaciones financieras hay miles de activos. Por tanto, necesitamos no sólo modelos de sus volatilidades sino también de sus correlaciones. Desde que se publicó el modelo ARCH original se han propuesto muchos enfoques para sistemas multivariantes. Sin embargo, no se ha descubierto todavía la mejor forma de hacerlo. Al aumentar el número de activos, se vuelve extremadamente difícil estimar los modelos y especificarlos de forma precisa. Básicamente, existen demasiadas posibilidades. Hay pocas publicaciones con ejemplos de modelos con más de cinco activos. El modelo de mayor éxito para estos casos es el modelo de correlación condicionada constante o CCC (*Constant Conditional Correlation*) de Bollerslev (1990). Este estimador logra sus resultados estableciendo el supuesto de que las correlaciones condicionadas son constantes. Esto permite que las varianzas y covarianzas cambien sin que lo hagan las correlaciones.

El modelo de correlación condicionado dinámico, DDC (*Dynamic Conditional Correlation*), de Engle (2002a), constituye una generalización de este enfoque. Este modelo introduce un número reducido de parámetros para modelar las correlaciones, independientemente del número de activos. Las volatilidades están modeladas con especificaciones univariantes. De esta manera, se pueden predecir grandes matrices de covarianzas. El investigador empieza por estimar las volatilidades una por una, y estima después las correlaciones conjuntamente con una cantidad reducida de parámetros adicionales. La investigación preliminar sobre este tipo de modelos resulta prometedora. Se han modelado sistemas de hasta 100 activos obteniendo buenos resultados. Las aplicaciones para la gestión del riesgo y la asignación de activos son inmediatas. Muchos investigadores están desarrollando ya modelos relacionados con éstos que podrían dar incluso mejores resultados. No es descabellado pensar que en los próximos años contaremos con un conjunto de métodos útiles para modelar las volatilidades y las correlaciones de grandes sistemas de activos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andersen, T. G. y Bollerslev, T. (1998a): "Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts", *International Economic Review,* vol. 39, nº 4, noviembre, pp. 885-905.

Andersen, T. G. y Bollerslev, T. (1998b): "Deutsche Mark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies", *Journal of Finance*, vol. 53, nº 1, febrero, pp. 219-265.

Andersen, T. G.; Bollerslev, T.; Diebold, F. X. y Labys, P. (2003): "Modeling and Forecasting Realized Volatility", *Econometrica,* vol. 71, nº 2, marzo, pp. 579-625.

Bates, D.S. (2003): "Empirical Option Pricing: A Retrospection", *Journal of Econometrics,* vol. 116, nº 1-2, septiembre-octubre, pp. 387-404.

Black, F. y Scholes, M. (1972): "The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency", *Journal of Finance*, vol. 27, nº 2, mayo, pp. 399-417.

Bollerslev, T. (1986): "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics,* vol. 31, nº 3, abril, pp. 307-327.

Bollerslev, T. (1990): "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model", *Review of Economics and Statistics,* vol. 72, nº 3, agosto, pp. 498-505.

Bollerslev, T.; Chou, R-Y. y Kroner, K.F. (1992): "Arch Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics,* vol. 52, nº 1-2, abril-mayo, pp. 5-59.

Bollerslev, T.; Engle, R.F. y Nelson, D. (1994): "Arch Models", en Engle, R.F. y McFadden, D. L.(eds.), *Handbook of econometrics,* vol. 4, North-Holland, Amsterdam, pp. 2959-3038.

Bollerslev, T. y Rossi, P.E. (1995): "Dan Nelson Remembered", *Journal of Business and Economic Statistics,* vol.13, nº 4, octubre, pp. 361-364.

Burns, P.; Engle, R.F. y Mezrich, J. (1998): "Correlations and Volatilities of Asynchronous Data", *Journal of Derivatives,* vol. 5, nº 4, verano, pp. 7-18.

Chou, R-Y.; Engle, R.F. y Kane, A. (1992): "Measuring Risk-Aversion from Excess Returns on a Stock Index", *Journal of Econometrics,* vol. 52, nº 1-2, abril-mayo, pp. 201-224.

Clark, P.K. (1973): "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica,* vol. 41, nº 1, enero, pp. 135-156.

Engle, R.F. (1982): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica,* vol. 50, nº 4, julio, pp. 987-1008.

Engle, R. F. (1982): "Estimates of the Variance of U.S. Inflation Based Upon the Arch Model", Jour*nal of Money, Credit, and Banking,* vol. 15, nº 3, agosto, pp. 286-301.

Engle, R. F. (2000): "The Econometrics of Ultra-High-Frequency Data", *Econometrica,* vol. 68, nº 1, enero, pp. 1-22.

Engle, R. F. (2002a): "Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models", *Journal of Business and Economic Statistics,* vol. 20, nº 3, julio, pp. 339-350.

Engle, R. F. (2002b): "New Frontiers for Arch Models", *Journal of Applied Econometrics,* vol. 17, nº 2, septiembre-octubre, pp. 425-446.

Engle, R. F. y Ishida, I. (2002): "Forecasting Variance of Variance: The Square-Root, the Affine, and the Cev Garch Models", Department of Finance working papers, Universidad de Nueva York.

Engle, R.F.; Ito, T. y Lin, W. (1990a): "Meteor-Showers or Heat Waves-Heteroskedastic Intradaily Volatility in the Foreign-Exchange Market", *Econometrica,* vol. 58, nº 3, mayo, pp. 525-542.

Engle, R.F.; Lilien, D.M. y Robins, R.P. (1987): "Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model", *Econometrica,* vol. 55, nº 2, marzo, pp. 391-407.

Engle, R.F.; Ng, V.K. y Rothschild, M. (1990b): "Asset Pricing with a Factor-Arch Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills", *Journal of Econometrics,* vol. 45, nº 1-2, julio-agosto, pp. 213-237.

Engle, R.F. y Russell, J.R. (1998): "Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data", *Econometrica,* vol. 66, nº 5, septiembre, pp. 1127-1162.

French, K.R.; Schwert, G.W. y Stambaugh, R.F. (1987): "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics,* vol. 19, nº 1, septiembre, pp. 3-29.

Friedman, M. (1977): "Nobel Lecture: Inflation and Unemployment", *Journal of Political Economy,* vol. 85, nº 3, junio, pp. 451-472.

Glosten, L.R.; Jagannathan, R. y Runkle, D.E. (1993): "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks", *Journal of Finance,* vol. 48, nº 5, diciembre, pp. 1779-1801.

Hamao, Y.; Masulis, R.W. y Ng, V.I. (1990): "Correlations in Price Changes and Volatility across International Stock Markets", *Review of Financial Studies,* vol. 3, nº 2, verano, pp. 281-307.

Harvey, A.C.; Ruiz, E. y Shephard, N. (1994): "Multivariate Stochastic Variance Mod*els", Review of Economic Studies,* vol. 61, nº 2, abril, pp. 247-264.

Jackwerth, J.C. (2000): "Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns", *Review of Financial Studies,* vol. 13, nº 2, verano, pp. 433-451.

Markowitz, H.M. (1952): "Portfolio Selection", *Journal of Finance,* vol. 7, nº 1, marzo, pp. 77-91.

Merton, R.C. (1973): "Theory of Rational Options Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science,* vol. 4, nº 1, primavera, pp. 141-183.

Merton, R.C. (1980): "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation", *Journal of Financial Economics,* vol. 8, nº 4, diciembre, pp. 323-361.

Nelson, D.B. (1991): "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica,* vol. 59, nº 2, marzo, pp. 347-370.

Rosenberg, J. V. y Engle, R.F. (2002): "Empirical Pricing Kernels", *Journal of Financial Economics,* vol. 64, nº 3, junio, pp. 341-372.

Sharpe, W. (1964): "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *Journal of Finance,* vol. 19, nº 3, septiembre, pp. 425-442.

Taylor, S. J. (1986): *Modeling financial time series*, John Wiley, Nueva York.

Taylor, S. J. (1994): "Modeling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study", *Mathematical Finance*, vol. 4, nº 2, abril, pp. 183-204.

Tobin, J. (1958): "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk", *Review of Economic Studies,* vol. 25, nº 2, febrero, pp. 65-86.

Zakoian, J. M. (1994): "Threshold Heteroskedastic Models", *Journal of Economic Dynamics and Control,* vol. 18, nº 5, septiembre, pp. 931-955.

ABSTRACT

Optimal behaviour takes risks that are worthwhile. This is the central paradigm of finance; we must take risks to achieve rewards but not all risks are equally rewarded. Both the risks and the rewards are in the future, so it is the expectation of loss that is balanced against the expectation of reward. Thus we optimize our behaviour, and in particular our portfolio, to maximize rewards and minimize risks. When practitioners implemented their financial strategies, they required estimates of the variances. Typically the square root of the variance, called the volatility, was reported. They immediately recognized that the volatilities were changing over time. They found different answers for different time periods. A simple approach, sometimes called *historical volatility,* was, and remains, widely used. In this method, the volatility is estimated by the sample standard deviation of returns over a short period. But, what is the right period to use? If it is too long, then it will not be so relevant for today and if it is too short, it will be very noisy. Furthermore, it is really the volatility over a future period that should be considered the risk, hence a forecast of volatility is need as well as a measure for today. Historical volatility had no solution for these problems. On a more fundamental level, it is logically inconsistent to assume, for example, that the variance is constant for a period such as one year ending today and also that it is constant for the year ending on the previous day but with a different value. A theory of dynamic volatilities is needed; this is the role that is filled by the ARCH models and their many extensions that we discuss today. I will describe the genesis of the ARCH model, and then discuss some of its many generalizations and widespread empirical support. In subsequent sections, I will show how this dynamic model can be used to forecast volatility and risk over a long horizon and how it can be used to value options.

Key words: Nobel lecture, risk, volatility, ARCH Model, GARCH model, financial volatility, financial practice, value at risk, valuing options.