UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA DEL GASTO EN PENSIONES EN LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

Juan Gómez García
Fulgencio Buendía Moya
Universidad de Murcia
José García Pérez
Universidad de Almería

En este trabajo se modeliza el gasto en pensiones de las distintas comunidades autónomas del Estado Español por medio de un proceso estocástico log-normal 17-dimensional, solución de una ecuación diferencial estocástica (E.D.E.) de Itô en la que se han introducido como factores exógenos en su vector drift los incrementos absolutos del PIB y de la población de derecho de cada comunidad autónoma. Estudiamos el proceso solución de la E.D.E. y sus características estadísticas, estimando la variable en estudio por medio de los vectores de medias, medianas y modas del proceso, una vez estimados los parámetros del mismo. Efectuamos predicciones del valor de la variable según el modelo estimado para el horizonte 2000-2005, y obtenemos las correlaciones entre los gastos de las distintas comunidades autónomas para diferentes momentos.

Palabras clave: proceso logarítmico-normal; factores exógenos; ecuación diferencial estocástica; vector de coeficientes de tendencia; gasto en pensiones.

1. INTRODUCCIÓN

La protección social existente en los países de la Unión Europea ha experimentado un gran desarrollo en las dos últimas décadas, no sólo en relación con la población protegida sino también en cuanto a las prestaciones que configuran la protección social.

En España, los gastos en protección social también han aumentado de forma notable incluso a una tasa superior a la media europea, si bien es cierto que se partía de niveles inferiores de gasto. Asimismo, cerca del 75% según el Anuario de Estadísticas Laborales de 1999, es realizado por el Sistema de la Seguridad Social, y en particular, más de tres cuartas partes corresponden a prestaciones económicas, es decir transferencias corrientes proporcionadas por el Sistema, que tienen como fin cubrir las cargas que para los hogares supone la aparición o existencia de ciertos riesgos o necesidades.

Las prestaciones sociales en dinero provienen de las transferencias del Sistema de Seguridad Social a los particulares, los cuales pueden disponer libremente de estos recursos, tales como las pensiones de jubilación, invalidez, incapacidad transitoria, desempleo u otras prestaciones como maternidad o ayudas familiares, lo que las diferencia de otras prestaciones sociales en especie tales como farmacia o asistencia sanitaria a través de las cuales el beneficiario recibe la prestación vía servicios.

Las prestaciones sociales se desglosan en: a) prestaciones sociales de recursos (prestaciones contributivas) y b) bajo condición de recursos (prestaciones no contributivas), estando éstas últimas condicionadas, explícita o implícitamente por la legislación de cada país, a que la renta y/o el patrimonio del beneficiario se sitúe debajo de un nivel concreto.

En estos términos, el gasto social en prestaciones sociales en dinero del Sistema de Seguridad Social en España ha experimentado un crecimiento espectacular en los últimos años, de forma que si en el año 1985 alcanzaba los 3,045 billones de ptas., diez años más tarde suponen 8,510 billones de ptas.

Los aumentos en términos reales de las pensiones medias, junto a los cambios demográficos y a los aumentos de cobertura, son algunas de las causas que generalmente se atribuyen a este aumento de los gastos en pensiones en términos reales, según Salas (1988), pp. 210-217, aunque otros autores, como Jimeno (2000), pp. 22-23 y Monasterio, Sánchez y Blanco (2000), pp. 38-39, citan causas más relevantes en este momento, como fallos en el diseño del sistema de prestaciones que pueden inducir a jubilaciones anticipadas o carreras cortas, por ejemplo.

En este contexto en España desde la Constitución de 1978, que crea el Estado de las Autonomías, hemos sido testigos de un intenso proceso de descentralización tanto del gasto público, derivado del traspaso de competencias de la Administración Estatal a las Autonómicas, como del ingreso público, aunque éste en menor medida.

Basándonos en estas características, intenso crecimiento de los gastos sociales en prestaciones económicas de las Administraciones de la Seguridad Social y configuración política de España en un estado de Autonomías, nos planteamos en este trabajo dos cuestiones fundamentalmente: en primer lugar, modelizar el comportamiento temporal de la variable volumen de gasto en pensiones del Sistema de Seguridad Social por cada Comunidad Autónoma, y en segundo lugar, la estimación de su proyección futura para el periodo 2000-2005 y la detección y medida de posibles correlaciones entre los gastos de las diferentes Comunidades Autónomas. Este último aspecto de los objetivos planteados nos permitirá realizar un análisis comparativo del signo de los incrementos del gasto en pensiones entre cada dos comunidades autónomas o de cada una con todas las demás en un mismo momento o en momentos diferentes, tales como el presente y otro futuro o los dos futuros. Asimismo será posible, utilizando las rectas de regresión mínimo-cuadráticas correspondientes, efectuar predicciones del gasto futuro en pensiones de una C.A. cualquiera, condicionado al valor de ese gasto en otra C.A. en el mismo u otro momento.

2. Metodología

En la actualidad existe gran interés por los estudios de la conducta del gasto público sobre la base de datos empíricos y hechos históricos, con el fin de descubrir si pueden hacerse generalizaciones acerca de su comportamiento.

El análisis cuantitativo en este campo ha seguido diferentes líneas que van desde la identificación de factores causales de la evolución del gasto y predicción de su comportamiento futuro hasta la comparación de niveles de cobertura del gasto entre países o áreas geográficas diversas.

Los análisis empíricos relativos a la primera de las líneas anteriormente citadas se manifiestan en una explotación rigurosa de los datos, formulación y contraste de hipótesis y aplicación de técnicas de estimación apropiadas.

El trabajo de Camerón (1978), pp. 1243-1261, puede ser representativo de otra línea de estudio caracterizada por la ampliación del número de variables explicativas en los análisis del gasto público y por la desagregación del gasto en categorías económicas o funcionales homogéneas. A esa misma línea pertenece el trabajo de Henrekson y Lybeck (1988), pp. 213-232, donde se presenta un modelo aplicable a las distintas realidades nacionales con el objetivo de contrastar las principales teorías explicativas del crecimiento del gasto público. Las ecuaciones que utiliza el modelo tienen como variables explicativas el grado de urbanización, población, renta per cápita, ratio del deflactor del consumo público sobre el deflactor del PIB, relación renta mediana-renta media, grado de apertura de la economía, participación de los impuestos directos en los impuestos totales, déficit público, empleo público, tasa de paro, tipos de gobierno, coaliciones de gobierno, etc.

La elección de las variables explicativas y su conocimiento limitan los trabajos , en el sentido de que considerar unas variables supone obviar otras que pueden tener más influencia sobre la variable en estudio. En cuanto al carácter predictivo de estos modelos, cabe destacar que permiten obtener una predicción a corto plazo. Ello es debido a la variación que pueden sufrir las variables que intervienen en él.

La metodología estadística utilizada en relación con la estimación de parámetros y contrastes de hipótesis se concreta en el método de los mínimos cuadrados y los estadísticos correspondientes para determinar los intervalos de confianza.

Otro tipo de modelos que se utilizan en estos estudios son los de series temporales. En este sentido, y a pesar de que en un principio se consideraron modelos determinísticos, los últimos trabajos se concretan en analizar series temporales estocásticas [Mures (1991), pp. 22-35]. Una ventaja importante que presentan estos modelos con respecto a los de regresión radica en que no utilizan otras variables, es decir, se analiza y predice el valor de la variable a partir de su comportamiento observado en el pasado. Un inconveniente importante es que requieren un periodo amplio de observación en el que no haya cambios estructurales del modelo y no es posible determinar a primera vista cual debe ser la especificación adecuada de un modelo de este tipo, ya que pueden existir diferentes precisiones del modelo potencialmente razonables. Asimismo, aunque pueden determinarse intervalos de confianza para las predicciones generadas por el modelo, siempre hay que decidir si podría tener lugar una modificación estructural significativa que afecte a la determinación de la variable en estudio, lo que puede alterar el comportamiento futuro de la serie temporal.

3. El modelo de difusión log-normal

Si bien la distribución log-normal ha sido utilizada ampliamente desde hace tiempo como modelo probabilístico en diversos campos científicos, las aplicaciones de la difusión estocástica log-normal han tenido hasta hace poco un uso más restringido. En general, los procesos de difusión son importantes por sus aplicaciones y en las últimas décadas la modelización estocástica ha alcanzado gran relieve. En particular, el proceso log-normal ha sido utilizado para modelizar variables, económicas sobre todo, en cuya evolución se pueda formular una hipótesis de cambio proporcional al estado del sistema. Es el prototipo de procesos para los movimientos de precios especulativos en donde la varianza del logaritmo del precio crece proporcionalmente al tiempo. Tintner y Sengupta, en su *Stochastic Economic* (1972), pp. 27-65, consideran estos procesos como gobernadores de gran número de fenómenos en los que se trata de estudiar el comportamiento de una variable económica.

En este trabajo abordamos el estudio del comportamiento de la variable GASTO PÚBLICO EN PENSIONES del sistema de la Seguridad Social, modelizándola como un proceso estocástico de difusión logarítmico-normal vectorial, cuyas componentes son las variables aleatorias que representan el valor del gasto en las distintas comunidades autónomas. El análisis de la evolución de la variable y la bondad del ajuste obtenido mediante una regresión exponencial (ver tabla siguiente) nos permiten aceptar un crecimiento exponencial de la tendencia del proceso y una hipótesis de variación del mismo proporcional a su estado (vector de coeficientes de tendencia de componentes proporcionales a los correspondientes de la variable).

Cuadro 1
COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN DE LOS AJUSTES EXPONENCIALES AL TIEMPO DE LOS VALORES REALES DEL GASTO EN PENSIONES DE LAS DISTINTAS C.A.

Independent: TIEMPO

Dependent	Mth	Rsq	d.f.	F	Sigf	b0	b1
C-LEÓN	EXP	,952	7	139,81	,000	189613	,0591
CATALUÑA	EXP	,991	7	772,31	,000	468965	,0575
C-VALENC	EXP	,980	7	335,48	,000	228549	,0609
PA-VASCO	EXP	,988	7	590,00	,000	163244	,0621
ANDALUCI	EXP	,981	7	360,92	,000	357402	,0702
ARAGÓN	EXP	,971	7	232,86	,000	91697,1	,0603
ASTURIAS	EXP	,969	7	217,69	,000	122565	,0522
BALEARES	EXP	,974	7	259,75	,000	46943,9	,0562
CANARIAS	EXP	,978	7	311,11	,000	56579,1	,0764
CANTABRI	EXP	,968	7	214,42	,000	42230,3	,0567
C-MANCHA	EXP	,966	7	201,19	,000	99490,4	,0619
EXTREMAD	EXP	,943	7	116,27	,000	59839,6	,0633
GALICIA	EXP	,943	7	116,19	,000	187847	,0576
MADRID	EXP	,927	7	88,32	,000	344786	,0403
MURCIA	EXP	,906	7	67,48	,000	64358,7	,0541
NAVARRA	EXP	,964	7	189,72	,000	35666,4	,0602
RIOJA	EXP	,975	7	272,03	,000	19179,2	,0570

Elaboración propia con programa SPSS a partir de los datos del Misterio de Trabajo y Asuntos Sociales (1998).

La metodología resultante de concebir el gasto público como un proceso estocástico log-normal tiene ventajas importantes respecto de la de series temporales y de la de modelos de regresión, que han sido los enfoques más utilizados para analizar esta variable. En efecto, no se precisa la selección de variables explicativas (caso de los modelos de regresión) o la especificación del modelo de series temporales; se mejora la capacidad de predicción del modelo, puesto que no requiere conocer otras variables, y se tiene la posibilidad de introducir variables externas al problema, que sólo dependen del tiempo, y que pueden mejorar la fiabilidad o capacidad predictiva del modelo. Además, en particular en nuestro estudio, conoceremos la distribución de la variable en cada momento, permitiéndonos el conocimiento de sus características estadísticas en los tiempos en que interese la predicción, así como las correlaciones entre las componentes correspondientes a distintos valores del tiempo.

En los trabajos anteriores en los que se estudia la evolución de ciertas variables a través de un proceso logarítmico-normal [Gómez y Tintner (1981), pp. 177-193; Gutiérrez et al. (1991), pp. 295-316; Mures (1991), pp. 150-169], se procede planteando las ecuaciones de Kolmogorov asociadas al proceso y dando directamente la función de densidad de transición como solución común de ambas ecuaciones de difusión. Esta metodología no permite disponer de la expresión analítica del proceso ni hacer el estudio de sus distribuciones p-dimensionales [ver, por ejemplo, Buendía-Gómez (1995), pp. 311-318 y (1998), pp. 369-370; y Gómez-Buendía (2001), pp. 393-414]

En este trabajo procederemos planteando la E.D.E. (ecuación diferencial estocástica) que rige el proceso log-normal multidimensional con factores exógenos, dando su solución y estudiando a partir de ésta todas las características estadísticas del proceso, en particular los momentos de las distribuciones p-dimensionales.

4. El proceso de difusión log-normal multidimensional con factores exógenos como proceso de Itô

4.1. Construcción de la E.D.E. Existencia y unicidad de soluciones

Consideramos la función

$$\mathbf{m}: [0,\infty)\times\left(R^{+}\right)^{n} \to R^{n}$$
$$\mathbf{m}(t,\mathbf{x}) = \left[\left(m_1^0+\sum_{j=1}^{k} m_1^j G_j(t)\right)x_1, \left(m_2^0+\sum_{j=1}^{k} m_2^j G_j(t)\right)x_2, \cdots, \left(m_n^0+\sum_{j=1}^{k} m_n^j G_j(t)\right)x_n\right]^{\mathbf{t}} \qquad (4.1.1)$$

de componentes

$$m_i(t,\mathbf{x}) = \left(m_i^0 + \sum_{j=1}^{k} m_i^j G_j(t)\right)x_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4.1.2)$$

donde $m_i^j \in R$ *(i=1, 2,..., n; j=0,1,...,k)* y las funciones $G_1(t),\ldots, G_k(t)$, llamadas *factores exógenos*, pues no dependen del estado del proceso, están definidas sobre $(0, \infty)$ y son continuas y acotadas y con valores en R.

Asimismo, consideremos la función matricial

$$\begin{aligned} &\beta: [0,\infty)\times\left(R^{+}\right)^{n} \to M_{n\times n}(R) \\ &\beta(t,\mathbf{x}) = \left(\beta_{ij}x_i x_j\right)_{i,j=1,2,\ldots,n} \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

con $\boldsymbol{B} = (ß_{ij})_{ij=1, 2,\ldots, n}$ una matriz dada de elementos $ß_{ik} \in R$, definida positiva y simétrica.

Como $\boldsymbol{B} = (ß_{ij})_{ij=1, 2,\ldots, n}$ es fijada de antemano, buscamos una matriz $ß^*(t,x)$ tal que

$$\beta^*(t,\mathbf{x})\left[\beta^*(t,\mathbf{x})\right]^{\mathbf{t}} = \beta(t,\mathbf{x}) = \left(\beta_{ij}x_i x_j\right)_{i,j=1,2,\ldots,n} \qquad (4.1.4)$$

Entonces planteamos la E.D.E.

$$\begin{aligned} &d\mathbf{X}(t) = \mathbf{m}(t,\mathbf{X}(t))dt + \beta^*(t,\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \\ &\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \in \left(R^{+}\right)^{n} \quad t \geq 0 \end{aligned} \qquad (4.1.5)$$

donde $\{\mathbf{X}(t),\ t \geq 0\}$ es un proceso con valores en $(R^{+})^{n}$ y, naturalmente, $\mathbf{W}(t)$ es un proceso Wiener o de movimiento Browniano n-dimensional *standard.*

Esta ecuación diferencial estocástica tiene sentido y solución única, que es un proceso de difusión [ver teorema de existencia y unicidad de soluciones de una E.D.E en Gihman y Skorohod (1972), pp. 40-43 ó Arnold (1974), p. 143, por ejemplo].

El proceso solución es [Buendía (1998), pp. 268-292]

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 exp\left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} diag\mathbf{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{m}^j \left(G_j\right)_0^t + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}(t)\right] \tag{4.1.6}$$

donde

$$\left(G_j\right)_0^t = \int_0^t G_j(s)\, ds, \quad \sigma \text{ verifica } \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{t}} = \mathbf{B} = \left(\beta_{ij}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

que es independiente de la matriz $\boldsymbol{\beta}^*(t,\mathbf{x})$ verificando (4.1.4) utilizada para plantear (4.1.5), y cuyo vector de coeficientes de tendencia (vector *drift*) $\mathbf{m}(t, \mathbf{x})$ es el dado por (4.1.1), siendo su matriz de difusión

$$\boldsymbol{\beta}^*(t,\mathbf{x})\left[\boldsymbol{\beta}^*(t,\mathbf{x})\right]^{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\beta}(t,\mathbf{x}) = \left(\beta_{ij} x_i x_j\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

En forma de componentes (4.1.6) se puede expresar

$$X_i(t) = X_{0i} exp\left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t + \sum_{r=1}^{n} \sigma_{ir} W_r(t)\right] \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{4.1.7}$$

4.2. Características estadísticas del proceso

A partir de (4.1.6) obtenemos para los momentos de las distribuciones p-dimensionales conjuntas del proceso $\{\mathbf{X}(t),\ t \geq 0\}$

$$m_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_p}\left[\mathbf{X}(t_1), \mathbf{X}(t_2), \ldots, \mathbf{X}(t_p)\right] =$$
$$E\left\{\left[X_1(t_1)\right]^{u_1^1} . \left[X_2(t_1)\right]^{u_1^2} \ldots . \left[X_n(t_1)\right]^{u_1^n} \ldots\ldots \left[X_1(t_p)\right]^{u_p^1} . \left[X_2(t_p)\right]^{u_p^2} \ldots . \left[X_n(t_p)\right]^{u_p^n}\right\}$$
$$= E\left\{exp\left[\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} u_i^j Y_j(t_i)\right]\right\} = E\left\{exp\left[\sum_{i=1}^{p} \mathbf{u}_i . \mathbf{Y}(t_i)\right]\right\} \tag{4.2.1}$$

$$\mathbf{u}_i = \left(u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^n\right) \in R^n, \ i = 1,2,..p; \ \mathbf{Y}(t) = \log \mathbf{X}(t), \ \mathbf{Y}_0 = \log \mathbf{X}_0$$

puesto que el proceso $\{\mathbf{Y}(t) = log\, \mathbf{X}(t),\ t \geq 0\}$ es, de (4.1.6), un proceso Gaussiano, aunque no Wiener, con funciones media y covarianza

$$E\left[\mathbf{Y}(t)\right] = \mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} diag\mathbf{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{m}^j \left(G_j\right)_0^t$$

$$\mathbf{Cov}\left[\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}(s)\right] = \mathbf{Cov}\left[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}(t), \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}(s)\right] = \boldsymbol{\sigma}\left[min(t,s)\mathbf{I}\right]\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{t}} = min(t,s)\mathbf{B} \tag{4.2.2}$$

$$\mathbf{Cov}\left[\mathbf{Y}(t)\right] = \mathbf{Cov}\left[\mathbf{Y}(t), \mathbf{Y}(t)\right] = t\mathbf{B}$$

de modo que ***Y**(t)* sigue una distribución

$$N_n\left(\mathbf{Y}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2} diag\mathbf{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{m}^j \left(G_j\right)_0^t,\ t\mathbf{B}\right) \tag{4.2.3}$$

Nos interesan especialmente los siguientes momentos de las distribuciones bidimensionales y unidimensionales del proceso:

1) Para $p = 2,\ \mathbf{u}_1 = \left(0,0,..,\overset{i}{1},0,..,0\right)$ y $\mathbf{u}_2 = \left(0,0,..,\overset{j}{1},0,..,0\right)$

$$E\left[X_i(t)X_j(s)\right] = exp\left\{\begin{matrix} Y_{0i} + \left(m_i^0 - \frac{1}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{r=1}^{k} m_i^r \left(G_r\right)_0^t + \frac{1}{2}\beta_{ii}t + Y_{oj} \\ + \left(m_j^0 - \frac{1}{2}\beta_{jj}\right)s + \sum_{r=1}^{k} m_j^r \left(G_r\right)_0^s + \frac{1}{2}\beta_{jj}s + \beta_{ij}min(t,s) \end{matrix}\right\}$$

$$= X_{0i}X_{0j}exp\left\{m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r\left(G_r\right)_0^t + m_j^r\left(G_r\right)_0^s\right] + \beta_{ij}min(t,s)\right\} \qquad (4.2.4)$$

2) Los momentos marginales cualesquiera de las distribuciones unidimensionales, o sea de la variable *X(t)* general del proceso.

Para $p = 1$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = \left(\nu_1, \nu_2,..,\nu_n\right)$ y $t_1 = t$

$$m_{\nu_1,\nu_2,...,\nu_n}\left[\mathbf{X}(t)\right] = E\left\{\left[X_1(t)\right]^{\nu_1}.\left[X_2(t)\right]^{\nu_2}....\left[X_n(t)\right]^{\nu_n}\right\} = E\left\{exp\left[\mathbf{u}\cdot\mathbf{Y}(t)\right]\right\}$$

$$= exp\left\{\mathbf{u}\cdot\left[\log\mathbf{X}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_0^t\right] + \frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{B}t)\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\right\}$$

$$= X_{01}^{\nu 1}.X_{02}^{\nu 2}.\cdots X_{0n}^{\nu n}exp\left\{\mathbf{u}\cdot\left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)t + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_0^t\right] + \frac{1}{2}t\mathbf{uBu}^{\mathbf{t}}\right\} \qquad (4.2.5)$$

3) Los casos particulares del anterior

3.1) Para $p = 1$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = \left(0,0,..\overset{i}{2},0,..0\right)$

$$E\left\{\left[X_i(t)\right]^2\right\} = \left(X_{0i}\right)^2 exp\left[2m_i^0 t + 2\sum_{j=1}^{k} m_i^j\left(G_j\right)_0^t + \beta_{ii}t\right] \quad i = 1,2,..,n \qquad (4.2.6)$$

3.2) Para $p = 1$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = \left(0,0,..\overset{i}{1},0,..0\right)$

$$E\left[X_i(t)\right] = X_{0i}\,exp\left(m_i^0 t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j\left(G_j\right)_0^t\right) \quad i = 1,2,...,n \qquad (4.2.7)$$

Para la matriz función covarianza del proceso se tiene

$$\mathbf{Cov}\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{X}(s)\right] = \left(Cov\left[X_i(t),X_j(s)\right]\right)_{i,j=1,2,..,n}$$

$$Cov\left[X_i(t), X_j(s)\right] = E\left[X_i(t) X_j(s)\right] - E\left[X_i(t)\right] E\left[X_j(s)\right]$$

$$= X_{0i} X_{0j} exp\left\{m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r \left(G_r\right)_0^t + m_j^r \left(G_r\right)_0^s\right] + \beta_{ij} min(t,s)\right\}$$

$$- X_{0i} exp\left(m_i^0 t + \sum_{r=1}^{k} m_i^r \left(G_r\right)_0^t\right) X_{0j} exp\left(m_j^0 s + \sum_{r=1}^{k} m_j^r \left(G_r\right)_0^s\right)$$

$$= X_{0i} X_{0j} exp\left\{m_i^0 t + m_j^0 s + \sum_{r=1}^{k}\left[m_i^r \left(G_r\right)_0^t + m_j^r \left(G_r\right)_0^s\right]\right\}\left\{exp\left[\beta_{ij} min(t,s)\right] - 1\right\}$$

$$i, j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2.8)$$

y para la matriz de varianzas-covarianzas de la variable *n*-dimensonal **X***(t)*

$$Cov\left[X_i(t), X_j(t)\right] = E\left[X_i(t) \cdot X_j(t)\right] - E\left[X_i(t)\right] E\left[X_j(t)\right]$$

$$= X_{oi} X_{0j} exp\left[\left(m_i^o + m_j^0\right)t + \sum_{r=1}^{k}\left(m_i^r + m_j^r\right)\left(G_r\right)_o^t\right] \times \left[exp\left(\beta_{ij} t\right) - 1\right] \quad i, j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2.9)$$

En particular, para las varianzas marginales de **X***(t)*

$$Var\left[X_i(t)\right] = X_{0i}^2 exp\left[2 m_i^0 t + 2\sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t\right] \times \left[exp\left(\beta_{ii} t\right) - 1\right] \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2.10)$$

La matriz función de correlaciones del proceso será

$$\rho_{ij}(t,s) = Corr\left[X_i(t), X_j(s)\right] = \frac{Cov\left[X_i(t), X_j(s)\right]}{\sqrt{Var\left[X_i(t)\right] Var\left[X_j(s)\right]}}$$

$$= \frac{exp\left[\beta_{ij} min(t,s)\right] - 1}{\left[exp\left(\beta_{ii} t\right) - 1\right]^{1/2}\left[exp\left(\beta_{jj} s\right) - 1\right]^{1/2}} \quad i, j = 1,2,..,n \qquad (4.2.11)$$

y la matriz de correlaciones de la variable *n*-dimensional **X***(t)*

$$\rho_{ij}(t) = Corr\left[X_i(t), X_j(t)\right] = \frac{Cov\left[X_i(t), X_j(t)\right]}{\sqrt{Var\left[X_i(t)\right] Var\left[X_j(t)\right]}} =$$

$$= \frac{exp\left(\beta_{ij} t\right) - 1}{\left[exp\left(\beta_{ii} t\right) - 1\right]^{1/2}\left[exp\left(\beta_{jj} t\right) - 1\right]^{1/2}} \quad i, j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.2.12)$$

que, como se ve, no dependen de los coeficientes de tendencia del proceso ni, por tanto, de los factores exógenos.

Para las modas y medianas de los procesos componentes $\{X_i\,(t),\ t \geq 0\}$, teniendo en cuenta las expresiones de estas medidas para los procesos log-normales unidimensionales [Buendía (1998), p.184], las fórmulas (4.1.6), (4.1.7) y (4.2.3) y las distribuciones marginales del proceso $LN(n,k,\boldsymbol{m})$ $\{\mathbf{X}\,(t),\ t \geq 0\}$, se tiene

$$\begin{aligned} Moda\left[X_i(t)\right] &= X_{0i}\, exp\left[\left(m_i^0 - \frac{3}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t\right] \\ Mediana\left[X_i(t)\right] &= X_{0i}\, exp\left[\left(m_i^0 - \frac{1}{2}\beta_{ii}\right)t + \sum_{j=1}^{k} m_i^j \left(G_j\right)_0^t\right] \end{aligned} \qquad (4.2.13)$$

4.3. La densidad de transición del proceso

De (4.1.6) deducimos también, para la función de densidad de transición del proceso log-normal n-dimensional con k factores exógenos $\{\mathbf{X}\,(t),\ t \geq 0\}$ [Buendía (1998), pp. 238-239 y 288-289]

$$\begin{aligned} p\left(\mathbf{x}, t / \mathbf{x}_0, t_0\right) &= p\left(\mathbf{y}, t / \mathbf{y}_0, t_0\right)\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} \\ &= \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)(2\pi)^{n/2}\left\{det\left[\mathbf{B}(t-t_0)\right]\right\}^{1/2}}\, exp\left(-\frac{1}{2}Q\right) \end{aligned} \qquad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} Q = &\left[\log\mathbf{x} - \log\mathbf{x}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)(t-t_0) - \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_{t_0}^t\right]^{\mathbf{t}}\left[\mathbf{B}(t-t_0)\right]^{-1} \\ &\times\left[\log\mathbf{x} - \log\mathbf{x}_0 - \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)(t-t_0) - \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_{t_0}^t\right] \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

Los momentos condicionados por $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x_0} \in (R^+)^n$ del proceso $LN(n,k,\boldsymbol{m})$ son los momentos ordinarios del proceso $\{\mathbf{X}(t,\ t_0,\ \mathbf{x_0}),\ t \geq t_0\}$ con

$$\mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 exp\left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)(t-t_0) + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_{t_0}^t + \sigma\left[\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t_0)\right]\right]$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} m_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n}\left[\mathbf{X}(t)/\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0\right] &= E\left\{\left[X_1(t)\right]^{\nu_1}.\left[X_2(t)\right]^{\nu_2}....\left[X_n(t)\right]^{\nu_n} / \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0\right\} \\ &= E\left\{exp\left[\mathbf{u}\cdot\mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{y}_0)\right]\right\} \\ = exp\left\{\mathbf{u}\cdot\left[\log\mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)(t-t_0) + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_{t_0}^t\right] + \frac{1}{2}\mathbf{u}\left[\mathbf{B}(t-t_0)\right]\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\right\}& \\ = x_{01}^{\nu_1}.x_{02}^{\nu_2}.\cdots x_{0n}^{\nu_n} exp\left\{\begin{matrix}\mathbf{u}.\left[\left(\mathbf{m}^0 - \frac{1}{2}diag\mathbf{B}\right)(t-t_0) + \sum_{j=1}^{k}\mathbf{m}^j\left(G_j\right)_{t_0}^t\right] \\ + \frac{1}{2}\mathbf{u}\left[\mathbf{B}(t-t_0)\right]\mathbf{u}^{\mathbf{t}}\end{matrix}\right\}& \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$

de donde podemos obtener inmediatamente el vector de medias condicionadas por $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x_0}$, la matriz de varianzas-covarianzas condicionadas o la matriz de correlaciones condicionadas de la variable $\mathbf{X}(t)$.

4.4. Estimación de parámetros

En las condiciones prácticas usuales para conducir la inferencia en procesos, esto es, suponiendo que el muestreo es equidistante en el tiempo, que los factores exógenos $G_i(t)$ son conocidos sólo en los tiempos muestrales del proceso y que en cada intervalo $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ los factores exógenos son constantes, es decir, en cada intervalo

$$G_i(t_\alpha) = G_{i\alpha} \quad (i = 1,2,.., k)$$

se tendría, para intervalos de amplitud unidad $\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} G_i(t)\,dt = G_{i\alpha}$.

Entonces, centrándonos en el caso de dos factores exógenos $G_1(t)$ y $G_2(t)$, los estimadores de los vectores paramétricos $\mathbf{m}^0$, $\mathbf{m}^1$ y $\mathbf{m}^2$ satisfacen las siguientes ecuaciones, obtenidas por el método de máxima verosimilitud [Palacios (1995), pp. 121-123]:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^0 = \hat{\mathbf{m}}^0 - \frac{1}{2} diag\hat{\mathbf{B}} &= \frac{1}{n}\sum_{\alpha=2}^{n}\left[\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}\right] \\ \hat{\mathbf{m}}^1\left[\sum_{\alpha=2}^{n} G_{1\alpha}^2\right] &= \sum_{\alpha=2}^{n}\left[\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mu}^0 - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}\right] G_{1\alpha} \\ \hat{\mathbf{m}}^2\left[\sum_{\alpha=2}^{n} G_{2\alpha}^2\right] &= \sum_{\alpha=2}^{n}\left[\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mu}^0 - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha}\right] G_{2\alpha} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

de donde se obtienen $\hat{\mu}^0$, $\hat{\mathbf{m}}^1$ y $\hat{\mathbf{m}}^2$.

La matriz $\hat{\mathbf{B}}$ estimada de $\mathbf{B}$ se obtiene a partir de los estimadores $\hat{\mu}^0$, $\hat{\mathbf{m}}^1$ y $\hat{\mathbf{m}}^2$:

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{\alpha=2}^{n}\left[\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}\right]^{\mathbf{t}} . \left[\log \mathbf{x}_\alpha - \log \mathbf{x}_{\alpha-1} - \hat{\mathbf{m}}^1 G_{1\alpha} - \hat{\mathbf{m}}^2 G_{2\alpha}\right] \tag{4.4.2}$$

En las condiciones establecidas al principio, una vez estimados los parámetros del proceso, en las expresiones de los momentos y medidas de posición a estimar pondremos $\left(G_i\right)_o^t = \sum_{\alpha=1}^{t} G_{i\alpha}$.

5. Aplicación

Aunque la modelización estocástica se ha usado con éxito en ciertos campos científicos (biología, marketing , finanzas) son escasos los estudios macroeconómicos en los que se haya utilizado difusiones multidimensionales o en los que se haya modelado conjuntamente variables endógenas con otras variables exógenas controlables externamente. En este apartado, mostramos las posibilidades de esta metodología para explicar y predecir los valores de diecisiete variables macroeconómicas: *Gasto en pensiones en la Comunidad Autonómica i, i=1,2,...17,* que comprende las pensiones contributivas de invalidez e incapacidad, jubilación, viudedad, orfandad, a favor de familiares y las pensiones no contributivas. Se dispone de información de tales gastos para el periodo 1986-1995.

Sea $\left\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\right\} = \left\{(\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_{17}(t)), t \geq 0\right\}$ un proceso estocástico diecisiete-dimensional donde $\mathbf{X}_i(t)$ representa el gasto público en pensiones en la Comunidad Autónoma i en el año t. Como se ha indicado antes, el análisis de la evolución de las variables y la bondad del ajuste obtenido mediante una regresión exponencial para cada una de ellas nos permiten aceptar un crecimiento exponencial de la tendencia del proceso y una hipótesis de variación del mismo proporcional a su estado, y por ello suponer que $\mathbf{X}(t)$ satisface una E.D.E. del tipo (4.1.5). Aplicando los resultados teóricos obtenidos en los apartados 4.2, 4.3 y 4.4 se estiman los parámetros del vector de coeficientes de tendencia y la matriz de difusión, la solución de la E.D.E., así como sus características más importantes (valor esperado, mediano, modal, varianza) para cada *t* y también los valores de la función de correlación para cada proceso marginal en diferentes instantes de tiempo y para el proceso diecisiete-dimensional en el mismo o diferentes tiempos.

Como se ha señalado en la parte teórica, los resultados obtenidos allí se pueden utilizar para efectuar predicciones sobre valores futuros de $\mathbf{X}(t)$. Asimismo, verificaremos que eligiendo adecuadamente factores exógenos controlables se mejora la bondad del ajuste y que esto constituye un procedimiento de control de los valores futuros del proceso [puede verse, por ejemplo, en Barea, Carpio, Domingo y otros, (1996), un análisis de las causas del crecimiento del gasto en pensiones]. Se han ensayado como factores exógenos los siguientes: Producto Interior Bruto Regional (PIBR), Población Total de Derecho, Renta per Cápita y sus incrementos absolutos y relativos y se ha seleccionado los incrementos absolutos del PIBR y de la Población Total de Derecho. (En el apartado siguiente proporcionamos el criterio de selección). Los valores correspondientes se recogen en los cuadros 1 y 2 siguientes.

Cuando se quiere efectuar predicciones en tiempos donde los factores exógenos no son conocidos hay que predecirlos formulando alguna hipótesis sobre tales valores. Ejemplos de hipótesis posibles, entre otras muchas, son:

1) El factor exógeno crece a una tasa igual a la media en el periodo conocido o en un subperiodo final.

2) El factor exógeno crece a una tasa igual al máximo de las tasas en periodo conocido.

3) El factor exógeno crece a una tasa igual al mínimo de las tasas en periodo conocido.

Cuadro 1
INCREMENTO DEL PIBR EN MILLONES DE PESETAS DE 1986

Año	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Andalucía	284.073	256.878	148.387	299.041	136.236	32.306	-109.200	116.074	152.252
Aragón	45.194	79.798	76.491	44.051	20.121	12.416	-21.470	16.827	50.627
Asturias	18.930	39.613	36.467	-5.052	20.466	35.280	-30.668	14.573	18.189
Baleares	52.887	33.955	18.210	69.985	29.697	22.150	2.713	25.374	35.351
Canarias	83.057	76.952	59.279	-882	14.231	51.567	15.925	44.503	38.989
Cantabria	20.969	49.087	34.245	197	-3.546	9.175	-9.540	13.384	9.507
Cast-León	114.245	72.570	90.235	49.627	-4.199	18.377	39.852	54.529	41.084
Cast-La Mancha	103.340	104.677	92.157	43.634	26.121	14.993	-65.990	21.074	26.796
Cataluña	332.250	383.344	361.548	399.568	224.783	104.275	-80.583	207.481	250.564
Com.Valenciana	212.037	153.283	143.952	156.616	129.620	-20.182	-87.146	70.708	136.467
Extremadura	55.541	43.951	21.568	15.280	29.269	10.252	-8.563	10.970	12.212
Galicia	72.411	103.072	98.146	-6.839	57.355	28.526	-13.217	48.897	43.073
Madrid	276.062	229.715	259.037	163.075	191.809	-4.449	-69.203	129.825	182.284
Murcia	42.181	26.042	51.934	63.833	-27.362	8.245	-2.430	24.238	17.343
Navarra	51.612	14.937	51.221	17.384	-4.029	-11.182	-9.216	16.474	18.154
País Vasco	42.531	76.484	139.902	37.777	42.548	-45.905	-40.832	20.568	82.178
La Rioja	6.396	13.540	10.846	50.483	8.468	7.104	-1.927	5.998	8.883

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la Contabilidad Regional de España (I.N.E.).
Nota: En la actualidad, el I.N.E. todavía no dispone de los datos definitivos sobre el PIBR para los años posteriores a 1995.

Cuadro 2
INCREMENTO DE POBLACIÓN POR COMUNIDAD AUTÓNOMA

Año	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Andalucía	45.453	41.457	39.574	40.080	40.410	38.132	35.838	33.140	31.630
Aragón	-1.959	-2.361	-2.400	-2.768	-2.047	-1.165	-1.421	-1.941	-2.121
Asturias	-4.259	-5.469	-6.100	-6.084	-4.499	-3.188	-3.797	-4.708	-5.348
Baleares	6.703	11.098	12.544	7.422	4.050	4.402	2.930	2.778	3.915
Canarias	13.875	17.373	16.146	9.980	8.701	11.689	11.907	12.973	14.007
Cantabria	835	517	335	162	-118	-309	-429	-173	30
Cast-León	-5.529	-9.179	-12.255	-14.310	-10.711	-7.391	-7.629	-6.787	-6.120
Cast-La Mancha	-1.253	-3.192	-3.942	-2.272	2.175	5.554	6.278	6.773	7.274
Cataluña	8.277	10.567	11.547	8.594	5.345	4.982	2.965	-1.086	-2.157
Com.Valenciana	16.267	17.579	19.886	19.482	14.953	10.814	9.678	9.609	9.976
Extremadura	-69	-2.635	-5.576	-5.392	-1.561	1.590	2.410	2.858	2.895
Galicia	-12.311	-13.267	-13.241	-11.831	-6.199	-846	-589	-2.031	-2.963
Madrid	25.559	24.164	22.388	18.678	16.388	18.878	16.744	9.869	7.343
Murcia	7.771	7.491	7.822	7.565	7.224	7.619	7.275	6.917	6.788
Navarra	-25	5	395	406	917	1.456	1.155	1.164	1.335
País Vasco	-5.478	-10.380	-12.102	-11.198	-7.472	-5.455	-6.196	-6.909	-7.364
La Rioja	558	594	236	201	84	-522	-834	-680	-433

Fuente: Elaboración propia a partir de las Proyecciones y Estimaciones Intercensales de Población (I.N.E.)
Nota: Hasta 1990 son datos estimados. A partir de 1991 los incrementos se refieren a poblaciones proyectadas a partir del censo de 1991.

4) El factor exógeno se mantiene constante con valores iguales a la última observación.

5) El factor exógeno se predice mediante modelos de regresión.

En este trabajo se ha considerado para el primer factor exógeno, que los incrementos absolutos del PIBR se mantienen constantes e iguales al incremento medio en el subperiodo 1991-1995, y para el factor exógeno "incremento absoluto de población" se han utilizado las proyecciones del INE para el horizonte de predicción considerado.

5.1. Estimación del modelo y predicción

Utilizando las expresiones (4.4.1) se obtienen las siguientes estimaciones de los parámetros $\hat{\mu}^0$,$\hat{\mathbf{m}}^1$ y$\hat{\mathbf{m}}^2$ que aparecen en el cuadro 3 siguiente

Cuadro 3
PARÁMETROS ESTIMADOS

Parámetros	$\hat{\mu}^0$	$\hat{m}^1$	$\hat{m}^2$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{m}^0$
Andalucía	-8,5517979E-03	-2,8393467E-08	2,1181654E-06	4,5476648E-04	-8,3244147E-03
Aragón	1,5339947E-03	-1,3384672E-08	-2,8136814E-05	3,0888834E-04	1,6884389E-03
Asturias	7,4986612E-03	-9,5706479E-08	-8,7899587E-06	5,4489084E-04	7,7711066E-03
Baleares	2,1701673E-02	2,9250885E-07	3,3598716E-06	1,0490537E-03	2,2226200E-02
Canarias	1,2607376E-03	-1,4854431E-06	1,0001802E-05	1,9472387E-03	2,2343569E-03
Cantabria	5,1713664E-02	-3,2113619E-07	3,5661864E-05	3,8868261E-03	5,3657077E-02
Cast-León	-1,3584363E-02	1,0765854E-08	-7,7407406E-06	2,7897730E-04	-1,3444874E-02
Cast-La Mancha	4,9260098E-02	2,4722787E-07	-1,5809962E-06	3,3378650E-03	5,0929031E-02
Cataluña	3,3485165E-02	2,8936773E-08	2,1424789E-06	1,5724627E-03	3,4271396E-02
Com.Valenciana	4,8110239E-05	-1,2004641E-07	4,8960009E-06	1,2870581E-04	1,1246314E-04
Extremadura	4,3673871E-02	3,7635641E-07	-8,1218694E-06	2,5132718E-03	4,4930507E-02
Galicia	4,0623863E-02	-6,4958686E-07	-5,8586288E-06	3,6417791E-03	4,2444753E-02
Madrid	1,2339603E-02	5,4302205E-08	1,3915698E-06	2,1263177E-03	1,3402762E-02
Murcia	-7,4832941E-03	4,1040076E-07	7,1794471E-06	9,7148944E-04	-6,9975494E-03
Navarra	3,7170169E-02	1,1654289E-06	6,7777003E-06	2,1793367E-03	3,8259838E-02
País Vasco	1,3453139E-03	-2,9308384E-07	-8,3327350E-06	3,3377672E-04	1,5122022E-03
La Rioja	3,8652312E-02	9,9368575E-07	8,9965160E-06	2,0746950E-03	3,9689660E-02

Nota: Con las estimaciones de $\mathbf{m}^1$ y $\mathbf{m}^2$ obtenemos la matriz **B** estimada (3.4.2), y a partir de ella el vector $\mathbf{m}^0$ estimado.

Como estimación del gasto en pensiones en cada comunidad se utilizará la media o valor esperado, la mediana o la moda de cada proceso componente (gasto correspondiente en cada comunidad autónoma). En el cuadro 4 se recogen los valores reales de gasto para el periodo estudiado, así como las medias, modas y medianas estimadas.

Para comparar los ajustes obtenidos para cada elección de factores exógenos y seleccionar finalmente los indicados se ha utilizado como indicador el error promedio relativo (EPR), promedio de los cocientes por el gasto real de las diferencias en valor absoluto entre la media estimada y dicho gasto real, expresado porcentualmente. (En los cuadros 4 se da también el error relativo máximo de la media estimada, EMR, para cada C.A., en los años en que son conocidos los valores reales). Se incluyen también, después del cuadro 4 los gráficos del comportamiento de los valores reales y estimados para algunas de las comunidades autónomas en el periodo 1987-1995, que se han seleccionado a título de ilustración.

Una vez modelizada la variable de interés podemos realizar predicciones bajo las hipótesis detalladas anteriormente acerca de los factores exógenos. En el cuadro 4 se recogen predicciones para el periodo 1996-2005.

Los cuadros 5 y 6 muestran los valores de la función de correlación del proceso para $t = 2000$ y para $(t, s) = (2000,2005)$.

Comentario.- Como el proceso multidimensional

$$\{\log \mathbf{X}\,(t) = (\log X_1\,(t); \log X_2\,(t), \dots, \log X_{17}\,(t)),\ t \geq 0\}$$

es Gaussiano, sus distribuciones bidimensionales son normales, y si no existe asociación lineal entre las variables $\log X_i\,(t)$, $\log X_j\,(s);\ t,\ s \geq 0$, tampoco la hay de ningún otro tipo funcional. En este caso, esta propiedad se transmite a las variables $X_i\,(t),\ X_j\,(s);\ t,\ s \geq 0$. Esto significa que las correlaciones bajas las interpretaremos prácticamente como independencia.

En el cuadro 5, de correlación solamente espacial, observamos que Andalucía y Castilla-León, por ejemplo, presentan correlaciones negativas con la mayoría de las demás C.A. Esto significa, en los casos en que sean altas (cuando son bajas, como And.-Bal., And.-Cant., And.-Gal., etc. o C.M-And., C.M.-Murcia, etc., como hemos señalado antes, no existe relación de dependencia de ningún tipo), que en el año 2000, si en las demás C.A. se hubiera producido gastos superiores al estimado en una cantidad ΔG entonces en estas dos C.A. disminuiría el gasto respecto del estimado en cantidades que se calcularían a partir de las rectas de regresión mínimo cuadráticas correspondientes, que se obtienen a partir de (4.2.8)-(4.2.10). Asimismo, si tomamos, por ejemplo, el par País Vasco-Cantabria, con un coeficiente de correlación 0,907, interpretamos que si en el País Vasco se produjera un incremento del gasto estimado de ΔG, entonces en Cantabria el gasto estimado experimentaría un incremento del mismo signo $\Delta G'$ que calcularíamos a partir de la recta de regresión mínimo cuadrática País Vasco-Cantabria para el año 2000. En definitiva, en los casos de la correlaciones altas entre dos C.A., podemos estimar los valores en una de ellas condicionados a valores dados de la otra distintos del estimado en los cuadros 4.

Cuadro 4
VALORES REALES, ESTIMADOS Y PREDICCIONES (en millones de pesetas de 1986)

Año				1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2005
Comunidad Autónoma								*Valores Reales y Estimados*							*Predicciones*			
Andalucía		Gasto	378.362	403.277	435.885	480.069	519.873	558.712	606.961	618.993	642.642							
			Media	394.429	423.958	455.284	487.359	524.478	563.368	604.632	641.106	676.915	716.683	756.752	797.369	840.285	885.912	1.151.938
EPR	EMR	Moda	394.160	423.380	454.353	486.031	522.693	561.067	601.751	637.617	672.772	711.811	751.095	790.868	832.866	877.492	1.137.105	
2,93	5,33	Mediana	394.340	423.765	454.973	486.916	523.883	562.600	603.670	639.941	675.531	715.055	754.861	795.196	837.804	883.096	1.146.972	
Aragón			Gasto	94.915	101.089	109.225	120.629	128.203	136.206	141.177	146.802	151.343						
			Media	95.139	101.737	108.917	117.868	125.033	129.396	134.941	142.724	151.655	161.210	172.445	185.218	199.357	214.250	309.503
EPR	EMR	Moda	95.095	101.643	108.765	117.650	124.744	129.037	134.504	142.196	151.023	160.464	171.569	184.191	198.160	212.865	306.790	
2,04	5,00	Mediana	95.124	101.705	108.866	117.795	124.937	129.277	134.795	142.548	151.444	160.961	172.153	184.875	198.958	213.787	308.596	
Asturias			Gasto	126.366	135.112	141.178	153.011	164.071	172.614	181.384	183.070	188.451						
			Media	125.309	132.004	139.873	148.780	155.684	160.813	168.061	176.282	185.884	195.959	206.872	218.597	231.026	244.037	321.050
EPR	EMR	Moda	125.207	131.789	139.530	148.294	155.049	160.026	167.102	175.133	184.522	194.364	205.020	216.464	228.584	241.260	316.103	
3,47	7,35	Mediana	125.275	131.932	139.759	148.618	155.472	160.550	167.740	175.898	185.429	195.426	206.253	217.884	230.209	243.108	319.393	
Baleares			Gasto	48.706	51.946	55.172	59.135	64.074	67.492	71.912	72.275	74.864						
			Media	49.777	53.356	57.208	61.211	63.998	66.843	69.076	71.822	75.182	78.407	81.739	85.190	88.789	92.554	113.971
EPR	EMR	Moda	49.698	53.189	56.938	60.827	63.496	66.215	68.319	70.923	74.125	77.183	80.336	83.596	86.991	90.537	110.614	
2,02	3,94	Mediana	49.751	53.300	57.118	61.083	63.830	66.633	68.823	71.521	74.828	77.997	81.269	84.655	88.186	91.877	112.841	
Canarias			Gasto	60.746	65.486	70.793	76.427	83.217	89.960	104.101	100.248	109.895						
			Media	58.397	62.113	66.995	74.290	79.527	82.984	91.498	97.729	106.337	116.535	127.217	138.576	150.899	164.235	247.559
EPR	EMR	Moda	58.227	61.751	66.411	73.427	78.374	81.542	89.646	95.472	103.578	113.180	123.194	133.803	145.277	157.654	234.194	
5,25	12,11	Mediana	58.340	61.992	66.800	74.002	79.141	82.501	90.877	96.971	105.409	115.405	125.862	136.966	149.001	162.011	243.021	
Cantabria			Gasto	43.699	46.542	49.759	53.871	57.696	60.918	65.217	65.090	67.381						
			Media	44.868	47.468	50.132	53.198	55.959	58.225	60.687	63.365	66.726	70.368	73.948	77.533	81.254	85.190	107.222
EPR	EMR	Moda	44.607	46.917	49.263	51.972	54.351	56.223	58.260	60.478	63.315	66.383	69.355	72.294	75.323	78.512	95.979	
2,74	6,95	Mediana	44.781	47.284	49.840	52.786	55.418	57.550	59.867	62.388	65.569	69.014	72.384	75.746	79.227	82.903	103.335	

Cuadro 4
VALORES REALES, ESTIMADOS Y PREDICCIONES (en millones de pesetas de 1986) (continuación)

Año			1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2005
Comunidad Autónoma							*Valores Reales y Estimados*							*Predicciones*			
Castilla y León		Gasto	194.359	206.982	225.057	251.141	268.275	278.435	289.417	299.482	307.083						
		Media	190.584	202.043	219.394	241.950	259.343	270.999	283.767	295.253	305.577	316.237	328.571	342.471	357.396	372.700	462.323
EPR	EMR	Moda	190.504	201.874	219.119	241.545	258.801	270.319	282.937	294.266	304.429	314.916	327.062	340.755	355.457	370.523	458.662
2,26	3,66	Mediana	190.557	201.987	219.302	241.815	259.162	270.772	283.490	294.924	305.194	315.796	328.067	341.898	356.748	371.973	461.100
Castilla-La Mancha		Gasto	102.916	109.396	119.514	131.949	141.018	149.717	154.736	160.899	166.153						
		Media	105.229	114.205	123.710	132.059	139.379	145.919	149.566	156.518	163.895	170.721	177.929	185.521	193.441	201.705	248.961
EPR	EMR	Moda	104.703	113.067	121.866	129.440	135.933	141.600	144.415	150.373	156.673	162.384	168.395	174.703	181.252	188.050	226.369
2,37	4,40	Mediana	105.054	113.824	123.092	131.180	138.221	144.465	147.829	154.442	161.451	167.896	174.693	181.843	189.290	197.046	241.190
Cataluña		Gasto	494.327	520.244	550.324	597.356	633.868	674.912	711.916	737.026	769.274						
		Media	506.250	541.874	580.858	619.401	652.610	684.674	711.400	738.915	766.691	793.482	819.145	844.244	869.718	896.309	1.036.909
EPR	EMR	Moda	505.057	539.324	576.762	613.584	644.959	675.052	699.750	725.103	750.587	774.985	798.165	820.683	843.455	867.195	991.466
2,32	5,55	Mediana	505.852	541.023	579.489	617.456	650.049	681.451	707.495	734.282	761.285	787.268	812.091	836.316	860.874	886.497	1.021.535
Com. Valenciana		Gasto	238.861	254.860	271.237	297.287	317.414	339.312	358.483	366.751	380.895						
		Media	240.331	257.185	278.659	300.871	318.762	336.947	357.053	371.130	383.418	400.349	416.595	432.589	449.072	466.436	560.912
EPR	EMR	Moda	240.284	257.085	278.497	300.639	318.455	336.557	356.570	370.558	382.752	399.577	415.711	431.588	447.946	465.177	558.859
0,98	2,74	Mediana	240.315	257.152	278.605	300.794	318.660	336.817	356.892	370.939	383.196	400.091	416.300	432.255	448.696	466.016	560.227
Extremadura		Gasto	60.971	65.733	72.442	80.564	86.509	91.398	95.136	97.277	99.305						
		Media	61.654	66.981	73.903	81.225	86.995	90.172	92.190	94.604	97.098	99.605	102.370	105.302	108.325	111.409	128.076
EPR	EMR	Moda	61.422	66.478	73.072	80.009	85.370	88.156	89.789	91.794	93.859	95.920	98.212	100.645	103.144	105.682	119.223
1,76	3,10	Mediana	61.577	66.813	73.625	80.818	86.450	89.495	91.383	93.658	96.006	98.361	100.965	103.726	106.570	109.467	125.054
Galicia		Gasto	193.992	209.094	220.668	240.624	254.350	269.773	304.531	289.012	298.514						
		Media	199.640	210.552	222.739	250.185	260.787	268.426	283.456	289.929	299.305	311.064	324.145	338.376	353.442	369.030	459.413
EPR	EMR	Moda	198.553	208.264	219.118	244.777	253.761	259.771	272.822	277.532	284.945	294.528	305.241	316.907	329.212	341.860	414.122
2,12	6,92	Mediana	199.277	209.787	221.525	248.369	258.424	265.509	279.866	285.737	294.440	305.451	317.717	331.063	345.173	359.742	443.791

Cuadro 4
VALORES REALES, ESTIMADOS Y PREDICCIONES (en millones de pesetas de 1986) (continuación)

Año				1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2005
Comunidad Autónoma								*Valores Reales y Estimados*							*Predicciones*			
Madrid		Gasto		351.589	388.222	406.187	382.972	412.140	442.006	453.994	477.618	502.391						
		Media		365.517	387.926	411.348	431.682	452.285	470.475	486.234	503.143	520.294	535.328	549.923	564.312	578.892	593.821	671.207
EPR	EMR	Moda	364.353	385.460	407.431	426.210	445.129	461.558	475.498	490.468	505.571	518.523	530.964	543.121	555.380	567.889	631.740	
5,58	12,72	Mediana	365.129	387.102	410.038	429.850	449.887	467.484	482.628	498.882	515.340	529.666	543.529	557.158	570.946	585.048	657.785	
Murcia		Gasto		65.150	69.624	76.234	84.276	90.850	94.815	98.169	98.880	99.207						
		Media		66.917	70.875	76.050	81.851	84.651	89.088	93.118	98.148	103.062	107.649	112.277	117.026	121.986	127.140	155.891
EPR	EMR	Moda	66.819	70.669	75.718	81.376	84.037	88.313	92.173	97.010	101.719	106.092	110.492	114.998	119.697	124.573	151.634	
3,36	6,82	Mediana	66.884	70.806	75.939	81.693	84.446	88.829	92.802	97.767	102.612	107.127	111.679	116.346	121.218	126.279	154.459	
Navarra		Gasto		36.285	39.150	44.100	46.539	50.089	52.541	54.628	56.572	59.234						
		Media		37.700	39.859	44.079	46.864	48.766	50.508	52.325	55.859	59.817	62.852	65.992	69.251	72.667	76.252	96.902
EPR	EMR	Moda	37.577	39.600	43.649	46.256	47.976	49.527	51.142	54.417	58.083	60.831	63.661	66.587	69.643	72.841	91.067	
2,16	4,22	Mediana	37.659	39.772	43.935	46.661	48.501	50.179	51.928	55.374	59.234	62.171	65.206	68.351	71.645	75.098	94.917	
País Vasco		Gasto	172.064	182.600	196.126	211.695	224.580	239.018	261.360	264.493	277.897							
		Media		170.792	182.370	193.909	210.848	221.948	235.772	251.633	265.344	275.839	292.352	310.808	331.212	353.294	376.569	522.183
EPR	EMR	Moda	170.706	182.187	193.618	210.426	221.393	235.064	250.753	264.284	274.599	290.892	309.101	329.228	351.002	373.939	517.239	
1,08	3,72	Mediana	170.763	182.309	193.812	210.707	221.763	235.536	251.340	264.990	275.425	291.865	310.238	330.550	352.529	375.690	520.530	
La Rioja		Gasto		19.859	21.147	22.631	24.574	26.186	28.028	28.865	30.008	30.787						
		Media		19.904	21.102	22.242	24.377	25.598	26.697	27.518	28.627	29.934	31.204	32.516	33.870	35.284	36.761	45.145
EPR	EMR	Moda	19.842	20.972	22.035	24.075	25.202	26.203	26.925	27.923	29.107	30.248	31.422	32.629	33.885	35.194	42.553	
2,44	4,75	Mediana	19.883	21.059	22.173	24.276	25.465	26.531	27.318	28.391	29.655	30.882	32.147	33.451	34.811	36.231	44.264	

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales (1998): Proyecto de Presupuestos de la Seguridad Social, Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales (varios años). La serie ha sido deflactada en función del IPC de 1986, según los datos del INE.

EPR: Error promedio relativo en tanto por ciento. Las predicciones para el periodo 1996-2005 se han obtenido bajo la hipótesis de que los incrementos absolutos anuales del PIBR son constantes e iguales al incremento medio en los años 1991-1995. Respecto a los incrementos anuales de población entre 1996 y 2005, han sido calculados a partir de las proyecciones de población realizadas por el I.N.E para ese periodo.

EMR: Error máximo relativo en tanto por ciento.

Cuadro 5
CORRELACIONES EN EL AÑO 2000

	And.	Arag.	Ast.	Bal.	Can.	Cant.	C-L	C-M	Cat.	C.Val.	Ext.	Gal.	Mad.	Mur.	Nav.	P. Vas.	Rioja
And.	1	0,554	0,454	0,049	0,481	-0,125	0,603	-0,236	-0,299	0,453	-0,331	-0,067	-0,672	0,775	-0,201	0,499	-0,39
Arag.	0,554	1	0,665	0,285	0,263	0,319	0,11	0,302	0,181	0,37	0,219	0,184	-0,332	0,602	0,315	0,110	0,284
Ast.	0,454	0,665	1	0,74	0,593	0,614	-0,18	0,469	0,444	0,639	0,445	0,615	-0,019	0,59	0,627	0,414	0,457
Bal.	0,049	0,285	0,74	1	0,52	0,891	-0,798	0,798	0,819	0,334	0,811	0,895	0,226	0,164	0,867	0,535	0,776
Can.	0,481	0,263	0,593	0,52	1	0,311	-0,1	0,056	0,104	0,394	0,116	0,648	0,193	0,33	0,312	0,907	0,118
Cant.	-0,125	0,319	0,614	0,891	0,311	1	-0,79	0,951	0,922	0,164	0,956	0,878	0,176	0,011	0,951	0,340	0,927
C-L	0,603	0,11	-0,18	-0,798	-0,1	-0,79	1	-0,818	-0,88	0,059	-0,889	-0,746	-0,529	0,491	-0,773	-0,154	-0,871
C-M	-0,236	0,302	0,469	0,798	0,056	0,951	-0,818	1	0,968	0,131	0,98	0,723	0,09	-0,106	0,88	0,126	0,933
Cat.	-0,299	0,181	0,444	0,819	0,104	0,922	-0,88	0,968	1	0,23	0,98	0,76	0,16	-0,254	0,824	0,162	0,893
C.Val.	0,453	0,37	0,639	0,334	0,394	0,164	0,059	0,131	0,23	1	0,099	0,179	-0,256	0,262	0,064	0,268	-0,021
Ext.	-0,331	0,219	0,445	0,811	0,116	0,956	-0,889	0,98	0,98	0,099	1	0,798	0,228	-0,225	0,889	0,152	0,953
Gal.	-0,067	0,184	0,615	0,895	0,648	0,878	-0,746	0,723	0,76	0,179	0,798	1	0,389	-0,04	0,847	0,616	0,774
Mad.	-0,672	-0,332	-0,019	0,226	0,193	0,176	-0,529	0,09	0,16	-0,256	0,228	0,389	1	-0,371	0,366	0,029	0,391
Mur.	0,775	0,602	0,59	0,164	0,33	0,011	0,491	-0,106	-0,254	0,262	-0,225	-0,04	-0,371	1	0,106	0,287	-0,13
Nav.	-0,201	0,315	0,627	0,867	0,312	0,951	-0,773	0,88	0,824	0,064	0,889	0,847	0,366	0,106	1	0,292	0,948
P. Vas.	0,499	0,110	0,414	0,535	0,907	0,340	-0,154	0,126	0,162	0,268	0,152	0,616	0,029	0,287	0,292	1	0,103
Rioja	-0,39	0,284	0,457	0,776	0,118	0,927	-0,871	0,933	0,893	-0,021	0,953	0,774	0,391	-0,13	0,948	0,103	1

Cuadro 6
CORRELACIONES ENTRE LOS AÑOS 2000 Y 2005

	And.	Arag.	Ast.	Bal.	Can.	Cant.	C-L	C-M	Cat.	C.Val.	Ext.	Gal.	Mad.	Mur.	Nav.	P. Vas.	Rioja
And.	0,858	0,475	0,389	0,042	0,412	-0,106	0,517	-0,202	-0,256	0,389	-0,283	-0,058	-0,575	0,664	-0,172	0,428	-0,334
Arag.	0,475	0,858	0,57	0,244	0,225	0,273	0,094	0,258	0,155	0,318	0,188	0,157	-0,284	0,516	0,27	0,094	0,243
Ast.	0,389	0,571	0,858	0,634	0,507	0,524	-0,155	0,401	0,38	0,548	0,381	0,526	-0,016	0,506	0,537	0,356	0,391
Bal.	0,042	0,245	0,634	0,857	0,445	0,761	-0,608	0,682	0,702	0,287	0,694	0,765	0,194	0,14	0,742	0,459	0,664
Can.	0,413	0,226	0,508	0,446	0,856	0,265	-0,085	0,048	0,089	0,338	0,099	0,554	0,165	0,283	0,267	0,778	0,101
Cant.	-0,107	0,274	0,526	0,764	0,266	0,854	-0,678	0,813	0,79	0,141	0,818	0,751	0,151	0,009	0,814	0,291	0,794
C-L	0,517	0,094	-0,155	-0,607	-0,085	-0,675	0,858	-0,699	-0,754	0,051	-0,76	-0,637	-0,453	0,421	-0,662	-0,132	-0,746
C-M	-0,202	0,259	0,402	0,684	0,048	0,813	-0,702	0,855	0,829	0,133	0,839	0,617	0,077	-0,091	0,753	0,108	0,799
Cat.	-0,256	0,155	0,381	0,702	0,089	0,787	-0,755	0,828	0,857	0,197	0,839	0,649	0,137	-0,217	0,705	0,139	0,765
C.Val.	0,389	0,318	0,548	0,286	0,337	0,14	0,051	0,112	0,197	0,858	0,084	0,153	-0,219	0,225	0,055	0,230	-0,018
Ext.	-0,284	0,188	0,382	0,696	0,099	0,817	-0,763	0,838	0,84	0,085	0,856	0,682	0,196	-0,193	0,761	0,131	0,816
Gal.	-0,058	0,158	0,528	0,768	0,555	0,75	-0,64	0,618	0,651	0,153	0,683	0,854	0,333	-0,035	0,725	0,528	0,662
Mad.	-0,576	-0,285	-0,016	0,194	0,164	0,151	-0,454	0,077	0,137	-0,22	0,195	0,333	0,856	-0,318	0,313	0,024	0,335
Mur.	0,665	0,516	0,506	0,14	0,283	0,009	0,421	-0,09	-0,217	0,225	-0,192	-0,034	-0,318	0,857	0,09	0,246	-0,111
Nav.	-0,173	0,270	0,538	0,743	0,267	0,813	-0,663	0,752	0,706	0,055	0,761	0,724	0,314	0,09	0,856	0,250	0,812
P. Vas.	0,428	0,094	0,355	0,458	0,777	0,29	-0,132	0,108	0,139	0,23	0,13	0,526	0,024	0,246	0,25	1	0,088
Rioja	-0,335	0,244	0,392	0,665	0,101	0,792	-0,747	0,798	0,765	-0,018	0,816	0,661	0,335	-0,111	0,812	0,088	0,856

Comentario.- En el cuadro 6 la correlación es espacio-temporal. Vemos en la diagonal del cuadro que cada C.A presenta alta correlación positiva de la v.a. Gasto-2000 con la v.a Gasto-2005. En el caso del País Vasco esa correlación es 1 y además la fila y la columna del País Vasco coinciden exactamente, por lo que las correlaciones (País Vasco2000-Comunidad X2005) y (Comunidad X2000-País Vasco2005) son las mismas. En los demás casos las correlaciones [X_i(2000) - X_j (2005)] y las [X_j(2000) - X_i (2005)] son muy parecidas, así que cada fila y su correspondiente columna sólo difieren en el último dígito. Esto es debido a que las correlaciones diagonales son altas. De modo que, en cada C.A., podemos utilizar las rectas de regresión 2000-2005 como hemos dicho para el cuadro 5. Y lo mismo entre cada dos C.A para las que se observe que presentan correlación 2000-2005 alta, como Extremadura-CastillaM. La fórmula (4.2.11) explica que fuera de la diagonal del cuadro no abunden las correlaciones muy altas, pues el intervalo temporal 2000-2005 es de gran amplitud.

Figura 1. Castilla y León

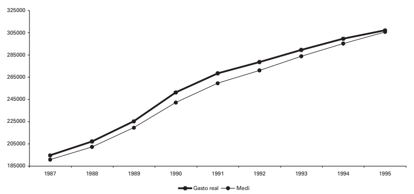


Figura 2. Cataluña

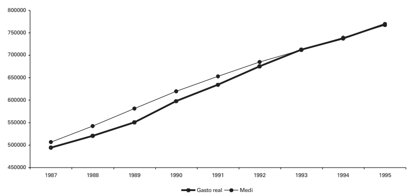


Figura 3. Comunidad Valenciana

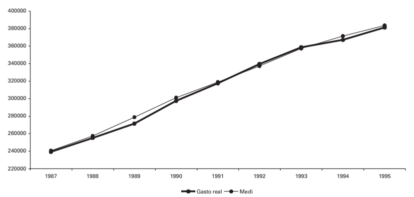
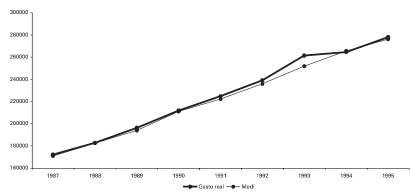


Figura 4. País Vasco



6. Comentarios finales y conclusiones

Los factores exógenos introducidos en el vector de coeficientes de tendencia del proceso log-normal vectorial utilizado como modelo se han seleccionado, como hemos establecido anteriormente, después de ensayos empíricos, como los que producen menor error medio relativo de los valores estimados respecto de los valores reales en el periodo en que estos son conocidos. Ciertamente pueden ensayarse otras técnicas de selección, como la de regresión múltiple, rechazando las variables hipotéticamente explicativas que contribuyan en menor porcentaje a la explicación de la variable en estudio.

Por otra parte los factores exógenos seleccionados se han introducido de forma lineal respecto de los parámetros, y los mismos en cada componente del proceso. Además, sólo se han introducido en el vector de coeficientes de tendencia y no en la matriz de difusión. Por tanto, pueden considerarse posibles variaciones del modelo desde distintos puntos de vista: por la selección de los factores exógenos y número de ellos, por la forma funcional en que se introducen estos respecto de los parámetros, por la consideración de distintos factores exógenos en las componentes o por la posibilidad de afectar la matriz de difusión con factores exógenos, y siempre de forma que se mantenga el carácter log-normal del proceso solución de la correspondiente E.D.E. y quede asegurada la existencia y unicidad de las soluciones de ésta. Cabe ensayar para cada variación introducida el ajuste con los valores reales, suponiendo resuelto el problema de estimación de parámetros en cada modelo. Podría así mejorarse la bondad del ajuste del modelo y su capacidad predictiva.

Además, hacemos observar que las características estadísticas del modelo se han obtenido todas de la expresión de la solución de la E.D.E., sin necesidad de efectuar suposiciones fuertes como, por ejemplo, que la función de densidad de transición es solución común y única de las ecuaciones de Kolmogorov asociadas, ni tener que dar directamente dicha solución, para a partir de ahí deducir que el proceso es log-normal.

Las aproximaciones a los valores reales obtenidas por las estimaciones de las medias, por ejemplo, del proceso mejoran las obtenidas por las metodologías anteriormente utilizadas referidas en el apartado 1, por lo que es esperable que las predicciones sobre valores futuros de la variable 17-dimensional GASTO EN PENSIONES sean más fiables.

Las tablas de la función de correlación del proceso, posibles en nuestro estudio gracias a que se consideran por primera vez para los procesos logarítmico normales las distribuciones finito dimensionales y no sólo la de la variable general del proceso o distribución unidimensional del mismo, nos permiten comparar la evolución del gasto real o del previsto de cada Comunidad Autónoma en un cierto momento con el de todas las demás en el mismo o diferentes años, y disponer toda esa información resumida para los momentos seleccionados.

Referencias bibliográficas

Arnold, L. (1974): *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications,* John Wiley& Sons, Nueva York.

Barea, J.; Carpio, M.; Domingo, E. *et al.* (1996): "Escenarios De evolución del gasto público en Pensiones y desempleo en el horizonte 2020", Documento de trabajo, Fundación BBV.

Buendía, F. (1998): *Contribución al estudio de los procesos estocásticos de difusión logarítmico-normales como procesos de Itô,* Tesis doctoral, Universidad de Murcia.

Buendía, F. y Gómez, J.(1995): "Estudio del proceso estocástico logarítmico-normal unidimensional con factores exógenos como solución de una ecuación de Itô", IX Reunión Asepelt-España, Santiago de Compostela.

Buendía, F. y Gómez, J.(1998): "El proceso estocástico de difusión logarítmico-normal vectorial como proceso de Itô", XXIV Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Almería.

Cameron, D. R. (1978): "The expansion of the public economy: A comparative analysis", *American Political Science Review,* vol. 72, pp.1243-1261.

Gihman y Skorohod (1972): *Stochastic Differential Equations,* Springer-Verlag, Nueva York.

Gómez, J. y Buendía, F. (2001): "Una generalización de los procesos estocásticos log-normal y de Gompertz como procesos de Itô", *Qüestiió. Quaderns d'Estadística i Investigació Operativa,* vol. 25, nº 3, pp. 393-414.

Gómez, L. y Tintner, G. (1981): "The application of diffusion processes in problems of developmental economic planing: a case study (Colombia)", en *Studies in Economic Theory and Practice,* North-Holland, Amsterdam, pp. 177-193.

Gutiérrez, R.; Angulo, J. M.; Gonzalez, A.; Perez, R. (1991): "Inference in log-normal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: Applications to modelling in economics", *Applied Stochastic Models and Data Analysis,* vol. 7, pp. 295-316.

Henrekson y Lybeck. (1988): "Explaining the growth of government in Sweden: A disequili-brium approach", *Public Choice,* vol. 57, pp. 213-232.

Jimeno, J. F. (2000): "El sistema español de pensiones: previsiones de gasto y medidas de reforma", *Hacienda Pública Española, monográfico XXX aniversario,* pp. 22-23.

Monasterio, C.; Sánchez, I. y Blanco, F. (2000): "La reforma del sistema de pensiones: el Pacto de Toledo y su desarrollo posterior", *Hacienda Pública Española, monográfico XXX aniversario,* pp. 38-39.

Mures, M. J. (1991): *Procesos estocásticos log-normales multivariantes. Aplicación a la modelización del gasto público en España,* Tesis doctoral., Universidad de Granada.

Palacios, M. A. (1995): *Procesos estocásticos de difusión. Aplicaciones económicas,* Tesis doctoral, Universidad de Murcia.

Salas, R. (1988): "Proyecciones del gasto en pensiones del sistema de la Seguridad Social 1980-2010", *Papeles de Economía Española,* vol. 37, pp. 210-217.

Tintner, G. y Sengupta, J. K. (1972): *Stochastic Economics,* Academic Press, Nueva York.

ABSTRACT

In this article the pension expenditures in different autonomous regions of Spain is modelled through a log-normal 17-dimensional stochastic process, that is the solution of an Itô stochastic differential equation (S.D.E.), where the PIB and the census of population in each autonomous region have been introduced as exogenous factor in the drift vector. We analyze the S.D.E. solution process and its statistical characteristics, estimating the variable under consideration through mean, median and mode vectors in the process, once its parameters have been estimated. We make predictions about the variable value through the estimated model for the 2000-2005 temporal range and the correlation coefficients between the expenditures of the autonomous regions are obtained for different years.

Key words: log-normal process, exogenous factor, stochastic differential equation, drift vector, expenditure on pensions.